שיעור 5 –
התמרת פורייה בדידה, DFT

1. ייצוג אותות במישור הזמן.
2. התמרת פורייה בדידה, DFT והגדרתה.
3. רזולוציה בתדר וריפוד באפסים.
4. (Fast Fourier Transform) FFT.
5. מכפלה במישור התדר שקולה לקונבולציה מעגלית במישור הזמן.
6. תרגילי כיתה.

ייצוג אותות במישור הזמן

ייצוג אותות כפונקציה של הזמן יתבצע ע"י הגדרת ווקטור זמן, t,
באופן הבא:

t = start_time : Ts : stop_time ;

כאשר Ts הוא זמן הדגימה השווה ל 1/Fs.
לאחר מכן, משתמשים בווקטור הזמן לייצוג האות המבוקש.

דוגמא:

```
f = 100;                % cosine signal frequency
Fs = 10e3;              % sample frequency
t = 0:1/Fs:1;           %  time vector
y = cos(2*pi*f*t);      %  final cosine signal
```

התמרת פורייה בדידה
DFT (Discrete Fourier Transform)

זוהי ההתמרה החשובה ביותר לחישובים נומריים בתחום ה-DSP. נעשה בה שימוש בניתוחי ספקטרום, ביצוע קונבולוציה מהירה ושימושים רבים אחרים.

התמרה זו לוקחת אות בדיד במישור הזמן, x(n), וממירה אותו למקבילה הבדידה שלו במישור התדר, X(k).
כלומר, היא לוקחת N דגימות של האות x(n), המרווחות באופן אחיד, וממירה אותן ל-N דגימות תדר בדידות.

הגדרת ה DFT

עבור האות $0 \le n \le N-1 \quad ;x(n)$, המקיים את תנאי נייקוויסט, תתקבל ההתמרה:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnk\frac{2\pi}{N}} \qquad ,0 \le k \le N-1$$

נהוג לסמן $e^{j\frac{2\pi}{N}} = W_N$ שמניב את הצורה:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \qquad ,0 \le k \le N-1$$

מספר תכונות של ה DFT

- DFT מניבה פונקציה מחזורית – $X(k+N) = X(k)$.
מתכונה זו ניתן להגדיר את ה- DFT רק עבור התחום שבין 0 ל- fs.

- DFT מניבה פונקציה סימטרית סביב נקודת המרכז, fs/2, שהיא תדר נייקוויסט (המידע שבתחום בין fs/2 ל- fs הוא בעצם תמונת מראה של המידע שבתחום בין 0 ל- fs/2).

התמרה הפוכה, IDFT (Inverse DFT)

IDFT ממירה N נקודות בדידות במישור התדר ל-N נקודות בדידות במישור הזמן:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk}$$

רזולוציה בתדר

רזולוציה בתדר היא כושר ההבחנה ברכיבי התדר של האות.
כתוצאה מההגדרה של ה DFT, המרווח בין שתי דגימות בתדר שווה להופכי של משך הזמן הכולל של האות בזמן.

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT}$$

ככל שהמרחק בין נקודות דגימה בתדר קטן יותר, כך ניתן להבחין ביותר רכיבי תדר.
הגדלת הרזולוציה בתדר בעצם אומרת הקטנת המרחק בין נקודות דגימה בתדר.

ריפוד באפסים

תנאי נייקוויסט מגביל את תחום התדרים של האות המניב ייצוג מהימן.
לכן, לא יהיה כדאי, להגדיל את הרזולוציה בעזרת הקטנת תדר הדגימה.
שיטת ריפוד באפסים מאפשרת הגדלת הרזולוציה בתדר מבלי לגרום לעיוות האות.
ריפוד באפסים במישור הזמן הינו הוספת נקודות דגימה שערכן שווה לאפס לסוף רצף נקודות הדגימה המקורי, וביצוע DFT על רצף הנקודות הארוך.
ריפוד באפסים יניב הצגת ספקטרום מפורטת יותר היכולה להבחין ברכיבי תדר בעלי רוחב צר שהיו נופלים בין נקודות הדגימה הלא מרופדות.

האות המרופד במישור הזמן יהיה:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le M \end{cases}$$

FFT (Fast Fourier Transform)

ה- FFT הינו בעצם אלגוריתם יעיל ביותר המבצע את ה- DFT בפחות זמן ובפחות פעולות חישוב.
ב- Matlab, מבוצעת ה DFT ע"י אלגוריתם FFT וע"י הפונקציה:

```
X = fft(x);
```

ב- Matlab, מבוצעת ה IDFT ע"י הפונקציה:

```
x = ifft(X);
```

ה DFT מבוצעת במהירות כאשר מספר הדגימות שווה ל 2^m,
ו- m מספר שלם וחיובי.

$$X(k) = fft(x) = \sum_{n=1}^{n=N} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(n-1)(k-1)}$$

Matlab מתחיל את מספור האינדקסים מ- 1.

שלבי ביצוע DFT ב- Matlab

1. הגדרת וקטור הדגימות של האות במישור הזמן.
כאשר N הוא מספר הדגימות באות (אורך האות) ו- Fs הוא תדר הדגימה (זמן הדגימה הוא Ts = 1/Fs).

2. ביצוע ה DFT :

```
X = abs(fftshift(fft(x)));
```

פונקצית fftshift משמשת להזזת רכיב התדר 0 למרכז הספקטרום ופונקצית ה abs משמשת בשביל להציג את הערך המוחלט של הספטקרום.

3. הגדרת ציר התדר :

```
ff = Fs*(-0.5:1/length(t):0.5-1/length(t));
```

דוגמא הממחישה את חשיבות הפרמטר N

1. הגדרת האות:

```
n = 0:29;
x = cos(2*pi*n/10);
```

2. הגדרת 4 ערכים ל- N:

```
N1 = 30;
N2 = 64;
N3 = 128;
N4 = 256;
```

3. ביצוע ההתמרה:

```
X1 = abs(fft(x,N1));
X2 = abs(fft(x,N2));
X3 = abs(fft(x,N3));
X4 = abs(fft(x,N4));
```

דוגמא - המשך

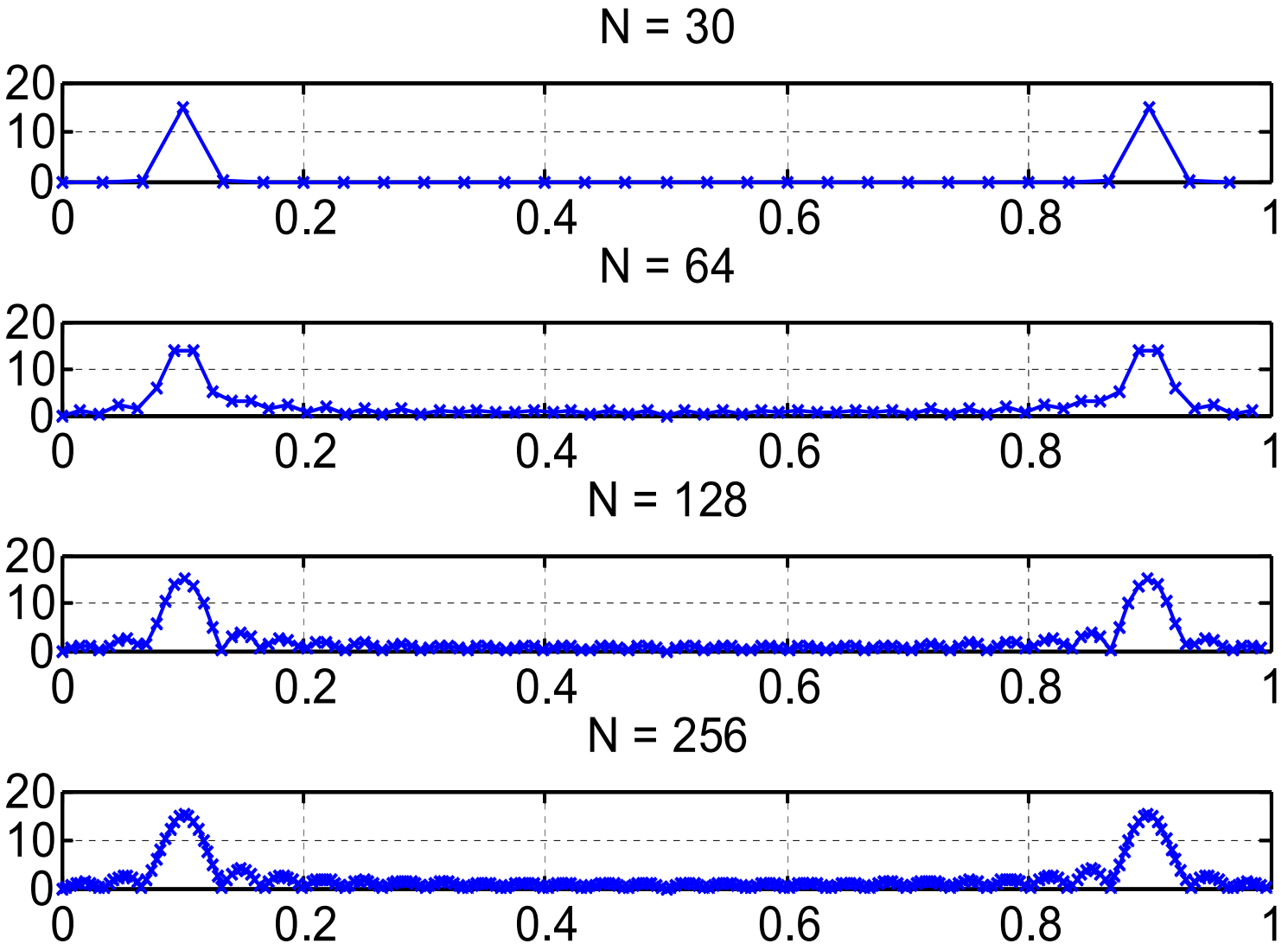
4. הגדרת ציר התדר, כאשר התחום הוא מ- 0 עד N-1 עבור N נקודות של ה- FFT. התחום עצמו מנורמל עבור N:

```
F1 = [0:N1-1]/N1;
F2 = [0:N2-1]/N2;
F3 = [0:N3-1]/N3;
F4 = [0:N4-1]/N4;
```

5. יצירת הגרפים, אחד מעל השני:

```
subplot(411),
plot(F1,X1,'-x'), grid on, title(['N = ',num2str(N1)]);
subplot(412),
plot(F2,X2,'-x'), grid on, title(['N = ',num2str(N2)]);
subplot(413),
plot(F3,X3,'-x'), grid on, title(['N = ',num2str(N3)]);
subplot(414),
plot(F4,X4,'-x'), grid on, title(['N = ',num2str(N4)]);
```

דוגמא – הצגת הגרפים המתקבלים



מכפלה במישור התדר שקולה לקונבולציה מעגלית במישור הזמן

$$z[n] \Longleftrightarrow Z(k)$$

$$Z(k) = X(k)Y(k) \qquad 0 \le k \le L-1$$

$$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n]\, y[(n-m) \bmod L]$$

כאשר L=N+M-1, M האורך של האות x[n] ו- N הוא האורך של האות y[n].

תרגילי כיתה

1. בדוגמא הקודמת האורך של הווקטור x הוגבל ל- 3 מחזורים.
עכשיו נבחר ערך גדול של N ונגדיל את מספר המחזורים ב- x:

```
n = 0:29;
x1 = cos(2*pi*n/10);   % 3 periods
x2 = [x1 x1];          % 6 periods
x3 = [x2 x1];          % 9 periods

N = 2048;

X1 = abs(fft(x1,N));
X2 = abs(fft(x2,N));
X3 = abs(fft(x3,N));

F = [0:N-1]/N;
```

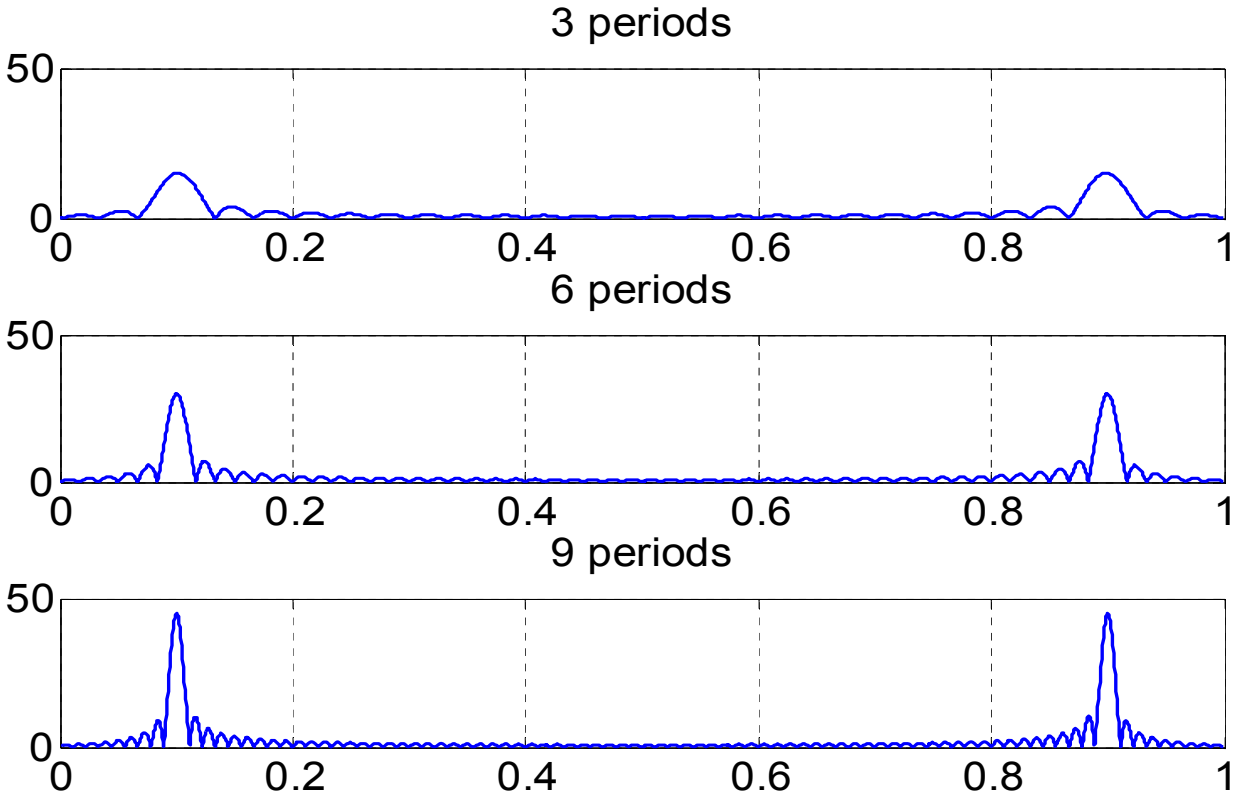
תרגילי כיתה – המשך תרגיל 1

```
subplot(311),
plot(F,X1), grid on,
ylim([0 50]), title('3 periods');

subplot(312),
plot(F,X2), grid on,
ylim([0 50]), title('6 periods');

subplot(313),
plot(F,X3), grid on,
ylim([0 50]), title('9 periods');
```

תרגילי כיתה – המשך תרגיל 1



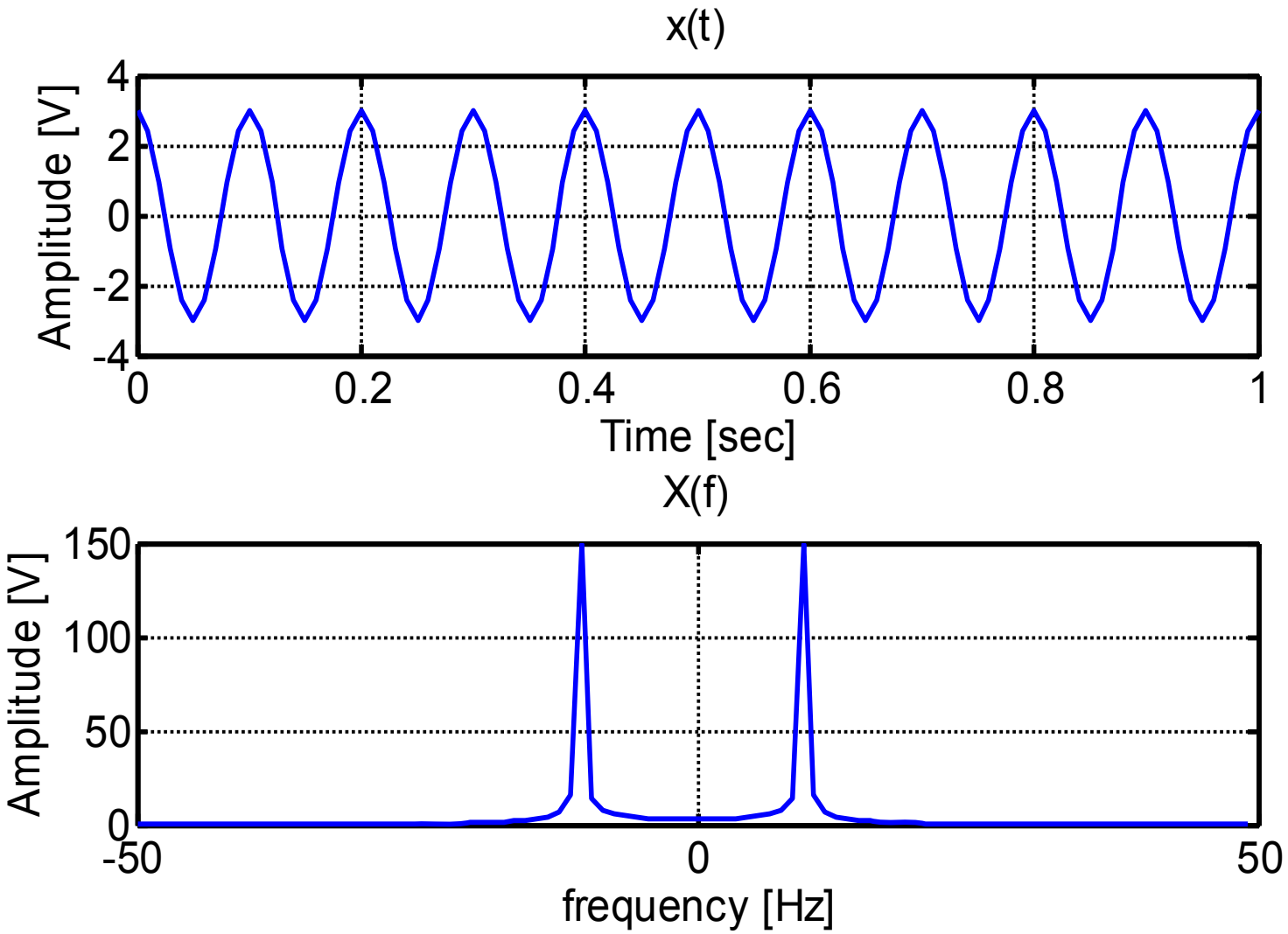
ניתן להסיק מכך שאמפליטודת ה- sincs עולה ככל שמספר המחזורים גדל. כך שככל שמגדילים את מספר המחזורים, אזי צורת ההתמרה נעשית יותר ויותר דומה לפונקציית הלם (הפונקציה התיאורטית).

תרגילי כיתה - המשך

2. ייצוג אות קוסינוס בעל תדר של 10 Hz ואמפליטודה של 3 V במישור הזמן למשך שנייה אחת ובמישור התדר.

```
A = 3;          % cosine amplitude [V]
f0 = 10;        % cosine frequency [Hz]
Fs = 10*f0;     % sample frequency [Hz]

t = 0:1/Fs:1;   % time axis
x = A*cos(2*pi*f0*t);
X = abs(fftshift(fft(x)));  % spectrum
ff = Fs*(-0.5:1/length(t):0.5-1/length(t)); % frequency axis

subplot(211),
plot(t,x), grid on, title('x(t)'),
xlabel('Time [sec]'), ylabel('Amplitude [V]');
subplot(212),
plot(ff,X), grid on, title('X(f)'),
xlabel('frequency [Hz]'), ylabel('Amplitude [V]');
```

תרגילי כיתה – המשך תרגיל 2