הרצאה 9

9.1 הגדרה: תהי מטריצה $A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ **,** $A^T{}_{n\times m}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ **נקראת מטריצה משוחלפת (Transpose matrix).**

דוגמא: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}; A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

9.2 תהיו A ו-B מטריצות שגודלם מתאימים לחיבור וכפל אזי :

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T=\alpha (A)^T, \forall \alpha \in \mathbf{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

הוכחה 5. $(A^{-1})^T(A^T)=(A^{-1}A)^T=I^T=I;(A)^T(A^{-1})^T=(AA^{-1})^T=I^T=I \Rightarrow (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

9.3 הגדרה: אם $A^T = A$ אזי A נקראת **מטריצה סימטרית**.
אם $A^T=-A$ אזי A נקראת **מטריצה אנטי-סימטרית**.

9.4 טענה: $\forall A_{n\times n,} B_{n\times n}$ **,** $AA^T - A^T A$ מטריצה סימטרית, $A^T B - B^T A$ מטריצה אנטי-סימטרית

הוכחה:

$$(AA^T - A^T A)^T = (AA^T)^T - (A^T A)^T = (A^T)^T A^T - (A)^T (A^T)^T = AA^T - A^T A$$

$$(A^T B - B^T A)^T = (A^T B)^T - (B^T A)^T = B^T (A^T)^T - (A)^T (B^T)^T = B^T A - A^T B = -(A^T B - B^T A)$$

9.5 הגדרה: אם $A^T A = AA^T$ אזי A נקראת **מטריצה נורמלית**.
אם $A^T A = AA^T = I \Leftrightarrow A^{-1}=A^T$ אזי A נקראת **מטריצה אורתוגונאלית**.

9.6 מטריצות תאים

הגדרה: מטריצה שאיבריה גם מטריצות נקראת מטריצת תאים (בלוקים). כל מטריצה אפשר להציג כמטריצת תאים באיזו שהיא צורה.

$$A==\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix};$$

דוגמא:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{14} & | & a_{15} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{24} & | & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{34} & | & a_{35} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix}$$

9.7 הגדרה: שתי מטריצות תאים נקראות מתאימות אם הן בעלות אותו מספר של תאים הנמצאים באלכסון והתאים האלכסוניים המתאימים הן מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

דוגמא: $A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ - מתאימות

9.8 פעולות אלגבריות עם מטריצות בלוקים

1). אם מכפילים מטריצת תאים בסקלר אזי מכפילים כל תא בסקלר

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}; \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \alpha A_{13} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \alpha A_{23} \end{bmatrix};$$

2). ניתן לחבר שתי מטריצות בלוקים מתאימות.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix};$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} + B_{13} \\ A_{21} + B_{11} & A_{22} + B_{22} & A_{23} + B_{23} \end{bmatrix}$$

3).כפל :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B;$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

9.9 הגדרה: מטריצת תאים נקראת **מטריצה בלוק אלכסונית** אם כל התאים פרט לתאי האכסון שווים לאפס.

(סימון : $\operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn})$)

דוגמא: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 5 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 6 & 7 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 8 & 9 \end{bmatrix}$

9.10 הגדרה: תאים נקראת **מטריצה בלוק משולשת עליונה(תחתונה)** אם כל התאים מעל(מתחת) לתאי האכסון שווים לאפס.

דוגמא: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & | & 2 & 1 \\ 3 & 4 & | & 1 & | & 2 & 1 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 5 & | & 1 & 2 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 6 & 7 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 8 & 9 \end{bmatrix}$ בלוק משולשת עליונה , $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 2 & 3 & | & 5 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 1 & 2 & | & 1 & | & 6 & 7 \\ 1 & 2 & | & 1 & | & 8 & 9 \end{bmatrix}$ בלוק משולשת תחתונה.

9.11 משפט: מטריצה בלוק אלכסונית הפיכה אס״ם כל בלוקים באלכסון – מטריצות הפיכות.

$$A^{-1}=diag(A_{11}{}^{-1},A_{22}{}^{-1},...,A_{nn}{}^{-1})$$

דוגמא:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 5 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 6 & 7 \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 8 & 9 \end{bmatrix};A^{-1}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} & | & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & | & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ - & | & - & | & - \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & | & 5^{-1} & | & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ - & | & - & | & - \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & | & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & | & \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 & | & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & | & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & 0 & | & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & | & 0 & | & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

9.12 משפט: מטריצת בלוק משולשת עליונה (תחתונה) הפיכה אס״ם כל בלוקים באלכסון – מטריצות הפיכות.