הרצאה 7

בפרק הזה נעסוק בפעולות אלגבריות על מטריצות

תהי מטריצה $A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ **. נרשום מטריצה בצורה אחרת:**

1). כווקטור שורה של וקטורי עמודות-

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\overset{|}{\underset{|}{a_1}}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\overset{|}{\underset{|}{a_2}}=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ldots,\overset{|}{\underset{|}{a_n}}=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

2). כווקטור עמודה של וקטורי שורות-

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -a_1- &= [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}], \\ -a_2- &= [a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}] \\ &\vdots \\ -a_m- &= [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}] \end{aligned}$$

7.1 נגדיר עכשיו סכום של מטריצות:

תהיו $B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$, $A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

נרשום $B_{m\times n}=\begin{bmatrix} -b_1- \\ -b_2- \\ \vdots \\ -b_m- \end{bmatrix}, A_{m\times n}=\begin{bmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{bmatrix}$ אזי

$$A+B=\begin{bmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -b_1- \\ -b_2- \\ \vdots \\ -b_m- \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-a_1-)+(-b_1-) \\ (-a_2-)+(-b_2-) \\ \vdots \\ (-a_m-)+(-b_m-) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

מסקנה: אפשר לחבר מטריצות רק באותו גודל.

דוגמא:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+4 & 2+5 & 3+6 \\ 1+0 & 0+1 & 1+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

7.2 נגדיר מכפלת מטריצה במספר:

תהיו $\alpha\in\mathbf{R}$, $A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{bmatrix}$ אזי

$$\alpha A=\alpha\begin{bmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ \vdots \\ -a_m- \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha(-a_1-) \\ \alpha(-a_2-) \\ \vdots \\ \alpha(-a_m-) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

7.3 נגדיר מכפלת מטריצות:

1). מכפלת מטריצה בווקטור

תהיו $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ אזי

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{matrix} | \\ a_1 \\ | \end{matrix} + x_2 \begin{matrix} | \\ a_2 \\ | \end{matrix} + \ldots + x_n \begin{matrix} | \\ a_n \\ | \end{matrix} =$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} +,\ldots,+ x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} +,\ldots,+ \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-a_1-)\cdot\vec{x} \\ (-a_2-)\cdot\vec{x} \\ \vdots \\ (-a_m-)\cdot\vec{x} \end{bmatrix}$$

דוגמא:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2). מכפלת מטריצה במטריצה

תהיו

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B_{n\times q} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}$$

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times q}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1q}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2q}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nq}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-b_1-\\-b_2-\\\vdots\\-b_n-\end{bmatrix}\overset{definition}{=}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}(-b_1-)+a_{12}(-b_2-)+\ldots+a_{1n}(-b_n-)\\a_{21}(-b_1-)+a_{22}(-b_2-)+\ldots+a_{2n}(-b_n-)\\\vdots\\a_{m1}(-b_1-)+a_{m2}(-b_2-)+\ldots+a_{mn}(-b_n-)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1n}b_{n2}&\cdots&a_{11}b_{1q}+a_{12}b_{2q}+\ldots+a_{1n}b_{nq}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2n}b_{n1}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2n}b_{n2}&\cdots&a_{21}b_{1q}+a_{22}b_{2q}+\ldots+a_{2n}b_{nq}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\ldots+a_{mn}b_{n1}&a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots+a_{mn}b_{n2}&\cdots&a_{m1}b_{1q}+a_{m2}b_{2q}+\ldots+a_{mn}b_{nq}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(-a_1-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_1\\|\end{pmatrix}&(-a_1-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_2\\|\end{pmatrix}&\cdots&(-a_1-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_q\\|\end{pmatrix}\\(-a_2-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_1\\|\end{pmatrix}&(-a_2-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_2\\|\end{pmatrix}&\cdots&(-a_2-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_q\\|\end{pmatrix}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\(-a_m-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_1\\|\end{pmatrix}&(-a_m-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_2\\|\end{pmatrix}&\cdots&(-a_m-)\cdot\begin{pmatrix}|\\b_q\\|\end{pmatrix}\end{bmatrix}=C_{m\times q}$$

מסקנה: ניתן להכפיל רק מטריצות שמספר עמודות של מטריצה ראשונה שווה למספר שורות של מטריצה שנייה.

דוגמא:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5&1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6\\1\cdot1+0\cdot3+1\cdot5&1\cdot2+0\cdot4+1\cdot6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&28\\6&8\end{bmatrix}$$

7.4 הגדרה: $I_{n\times n}=I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$-נקראת מטריצת יחידה, $O_{m\times n}=O=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$-נקראת מטריצת אפס.

7.5 לכל $A_{m\times n}$ **מתקיים :**

1. $A_{m\times n}+O_{m\times n}=A_{m\times n}$

2. $A_{m\times n}\cdot O_{n\times q}=O_{m\times q}$
$O_{q\times m}\cdot A_{m\times n}=O_{q\times n}$

3. $I_m A_{m\times n}=A_{m\times n}I_n$

7.6 עבור $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ **,** $\forall A,B,C$ **- מטריצות שניתנות לחיבור וכפל מתקיים:**

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
5. $(A+B)C=AC+BC$
$A(B+C)=AB+AC$
6. $(AB)C=A(BC)$
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$

תהי $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ - מערכת משוואות ליניאריות . אזי ניתן לרשום אותה בצורה מקוצרת

$A\vec{x}=\vec{b}$ כאשר $\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

7.7 משפט: תהי $A\vec{x}=\vec{b}$ - מערכת משוואות ליניאריות לא הומוגנית. אזי $\vec{x}=\vec{x}_h+\vec{x}_p$ - פתרון כללי של מערכת לא הומוגנית כאשר $\vec{x}_h$-פתרון כללי של מערכת הומוגנית, $\vec{x}_p$-פתרון פרטי של מערכת לא הומוגנית.

הוכחה:

$A\vec{x}=A(\vec{x}_h+\vec{x}_p)=A\vec{x}_h+A\vec{x}_p$ אבל $A\vec{x}_h=\vec{0}$ כי $\vec{x}_h$-פתרון כללי של מערכת הומוגנית,

$A\vec{x}_p=\vec{b}$ כי $\vec{x}_p$-פתרון פרטי של מערכת לא הומוגנית. אזי $A\vec{x}_h+A\vec{x}_p=\vec{0}+A\vec{x}_p=\vec{0}+\vec{b}=\vec{b}$

הרצאה 8

בפרק הזה נעסוק במטריצות ריבועיות $A_{n\times n}$

הגדרה 8.1 תהי A מטריצת ריבועית. A **הפיכה** אם קיימת מטריצה ריבועית B כך ש- $AB=BA=I$.
B נקראת **מטריצה הפוכה** של A. $B\overset{definition}{=}A^{-1}$.

משפט 8.2 $B=A^{-1}$ מוגדרת באופן יחיד.

הוכחה: נניח שקיימת C כך ש- $AC=CA=I$. נתבונן במכפלה BAC.

$$BAC=(BA)C=IC=C=B(AC)=BI=B\Rightarrow C=B$$

תהי $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ נמצא מטריצה הפוכה ל- A. נחפש מטריצה $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ כך ש $AB=BA=I$

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bt=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} acx+bcz=c \\ acx+adz=0 \end{cases}\Rightarrow (ad-bc)z=-c$$

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} adx+bdz=d \\ bcx+bdz=0 \end{cases}\Rightarrow (ad-bc)x=d$$

$$\begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} acy+bct=0 \\ acy+adt=a \end{cases}\Rightarrow (ad-bc)t=a$$

$$\begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} ady+bdt=0 \\ bcy+bdt=b \end{cases}\Rightarrow (ad-bc)y=-b$$

8.3 אם $ad-bc\neq 0$ **אזי** $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

8.4 **הגדרה:** $ad-bc$ נקרא **דטרמיננטה** של מטריצה $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. סימון: $\det(A),|A|$

8.5 מסקנה: מטריצה $A_{2\times 2}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **-הפיכה אם"ם** $\det(A)\neq 0$

8.6 טענה: לכל מטריצה הפיכה מתקיים:

1. $(A^{-1})^{-1}=A$

2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3. $(A_1A_2...A_k)^{-1}=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}...A_1^{-1}$

הוכחה:

1. $A^{-1}A=AA^{-1}=I$ **. אזי** $A=(A^{-1})^{-1}$ **לפי הגדרה 8.1**

2. $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$
$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B(AA^{-1})B^{-1}=BIB^{-1}=BB^{-1}=I$ **אזי** $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ **לפי הגדרה 8.1**

3. באינדוקציה: עבור $n=2$ $(A_2A_1)^{-1}=A_1^{-1}A_2^{-1}$ **לפי 2).**

נניח עבור $n=2$ $(A_2A_1)^{-1}=A_1^{-1}A_2^{-1}$. נניח עבור $n=k-1$ $(A_1A_2...A_{k-1})^{-1}=A_{k-1}^{-1}A_{k-2}^{-1}...A_1^{-1}$ אזי

עבור $n=k$

$$(A_1A_2...A_{k-1}A_k)^{-1}=((A_1A_2...A_{k-1})A_k)^{-1}=A_k^{-1}(A_1A_2...A_{k-1})^{-1}=A_k^{-1}(A_{k-1}^{-1}A_{k-2}^{-1}...A_1^{-1})=A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}A_{k-2}^{-1}...A_1^{-1}$$

משפט 8.7 אם A **-** מטריצה הפיכה אזי למערכת משוואות ליניאריות $A\vec{x}=\vec{b}$ קיים פתרון יחיד $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ לכל $\vec{b}$.

הוכחה: קיום: $A\vec{x}=A(A^{-1}\vec{b})=(AA^{-1})\vec{b}=I\vec{b}=\vec{b}$ אזי $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ - פתרון.

יחידות: $\forall\vec{y}; A\vec{y}=\vec{b}\Leftrightarrow A^{-1}A\vec{y}=A^{-1}\vec{b}\Leftrightarrow (A^{-1}A)\vec{y}=A^{-1}\vec{b}=I\vec{y}=A^{-1}\vec{b}\Leftrightarrow \vec{y}=A^{-1}\vec{b}=\vec{x}$

8.8 הגדרה: מטריצה שמתקבלת כתוצאה של ביצוע פעולה אלמנטארית על מטריצת יחידה נקראת **מטריצה אלמנטארית.**

דוגמאות של מטריצות אלמנטאריות:

$$R_3+3R_1\to R_3\Rightarrow E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_1\leftrightarrow R_2\Rightarrow E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$2R_2\to R_2\Rightarrow E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.9 טענה: כל פעולה אלמנטארית על מטריצה כלשהי זה תוצאה של מכפלת המטריצה במטריצה אלמנטארית מתאימה.

דוגמא:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1\to R_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d+2a & e+2b & f+2c \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_2\to R_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

8.10 כל מטריצה אלמנטארית הפיכה. המטריצה ההפוכה של מטריצה אלמנטארית – מטריצה אלמנטארית המתאימה שמעבירה את המטריצה חזרה למטריצת היחידה.

דוגמא:

$$R_3+3R_1\to R_3 \Rightarrow E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-3R_1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.11 משפט A - מטריצה הפיכה אס"ם היא שקולה למטריצת יחידה.

הוכחה: נניח $A\sim I$ אזי קיימת סידרה של פעולות אלמנטאריות שמעבירות את A למטריצת יחידה. אזי $A\to E_1A\to E_1E_2A\to \ldots \to E_1E_2\ldots E_kA=I$ כאשר $E_1,E_2,\ldots,E_k$ - המטריצות האלמנטאריות המתאימות. אזי $E_1E_2\ldots E_kA=(E_1E_2\ldots E_k)A=I\to E_1E_2\ldots E_k=A^{-1}$

נניח ש- A הפיכה אזי לפי משפט 8.7 למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פתרון יחיד לכל $\vec{b}$. אזי

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & b_1' \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & b_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & c_{nn} & b_n' \end{array}\right] \to \ldots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1'' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & b_n'' \end{array}\right] \Rightarrow A\sim I$$

8.12 מסקנה: **A** - מטריצה הפיכה אס"ם היא מכפלת המטריצות האלמנטאריות.

8.13 שיטת גאוס למציאת המטריצה ההפוכה A^{-1} **:** אם $I \sim A$ אזי $[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$ אחרת A – אינה הפיכה.

דוגמא:

נתונה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

א). למצוא A^{-1}

ב). לרשום את A כמכפלת המטריצות האלמנטאריות

פתרון:

א).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [I \mid A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ב).

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot A\xrightarrow{R_3+2R_2\to R_3}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot A$$

$$\xrightarrow{R_2-R_3\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot A\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot A$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\cdot A=I\Rightarrow$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$