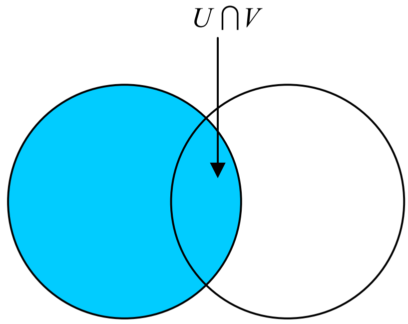
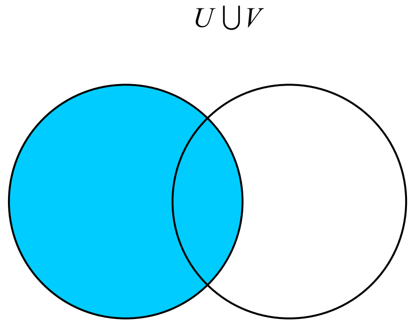
סכום וחיתוך של מרחבים וקטוריים:

12.1 הגדרה: יהיו U ו- V שני מרחבים וקטוריים.נגדיר $U\bigcup V=\{\vec{w}:\vec{w}\in U\vee\vec{w}\in V\}$,
$U\bigcap V=\{\vec{w}:\vec{w}\in U\wedge\vec{w}\in V\}$, $U+V=\{\vec{u}+\vec{v}:\vec{u}\in U,\vec{v}\in V\}$.





12.1 משפט: יהיו U ו- V שני תת-מרחבים וקטוריים.אזי $U+V,U\bigcap V$ גם תת-מרחבים וקטוריים.

הוכחה: עבור $U\bigcap V$:

1). $\forall\vec{w}_1,\vec{w}_2\in U\bigcap V;\vec{w}_1,\vec{w}_2\in U\Rightarrow\vec{w}_1+\vec{w}_2\in U,\vec{w}_1,\vec{w}_2\in V\Rightarrow\vec{w}_1+\vec{w}_2\in V\Rightarrow\vec{w}_1+\vec{w}_2\in U\bigcap V$

2). $\forall\vec{w}\in U\bigcap V,\forall\alpha\in\mathbf{R};\vec{w}\in U\Rightarrow\alpha\vec{w}\in U,\vec{w}\in V\Rightarrow CV\Rightarrow VU\bigcap V$

עבור $U+V$:

1). $\forall\vec{w}_1=\vec{u}_1+\vec{v}_1,\vec{w}_2=\vec{u}_2+\vec{v}_2\in U+V;\vec{w}_1+\vec{w}_2=\vec{u}_1+\vec{v}_1+\vec{u}_2+\vec{v}_2=(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\in U\bigcap V$

2). $\forall\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\in U+V,\forall\alpha\in\mathbf{R};\alpha\vec{w}=\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v};\alpha\vec{u}\in U,\alpha\vec{v}\in V\Rightarrow\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}\in U+V$.

12.2 מסקנה: יהיו $U_1,U_2,...,U_n$ תת-מרחבים וקטוריים.אזי $U_1\bigcap U_2\bigcap...\bigcap U_n;U_1+U_2+...+U_n$ גם תת-מרחבים וקטוריים. הוכחה באינדוקציה.

12.3 טענה: $U\bigcup V$ אינו תת-מרחב וקטורי באופן כללי.

דוגמא נגדית:

$$U=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix},x\in\mathbf{R}\right\},V=\left\{\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix},y\in\mathbf{R}\right\}\Rightarrow U\bigcup V=\left\{\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}x,y\in\mathbf{R}\right\}$$

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in U,\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\in V;\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\notin U\bigcup V$$

אזי $U\bigcup V$ אינו תת-מרחב וקטורי.

12.3 משפט: יהיו U ו- V שני (תת-)מרחבים וקטוריים אזי $\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\bigcap V)$.

הוכחה:

נניח $\dim(U)=m;\dim(V)=n,\dim(U\bigcap V)=k$. נבחר בסיס ל- $U\bigcap V$. תהי $U\bigcap V=span\{\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\}$. נבחר $\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k}$ וקטורים ב U כך ש $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\}$ יהיה בסיס ל U.
באותו אופן נבחר $\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}$ וקטורים ב V כך ש $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\}$ יהיה בסיס ל V.

נתבונן ב $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$. יש בקבוצה הזאת בדיוק $m+n-k$ איברים. אם נוכיח ש- $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$ בסיס ל $U+V$ אז הוכחנו את המשפט כי אז $\dim(U+V)=m+n-k=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\bigcap V)$.

1). נוכיח ש $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$-בת"ל.

$$a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...,+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k+c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow\vec{w}=b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...,+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}$$

אזי $c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}\in V$ כי $\vec{w}\in U\bigcap V\Rightarrow\vec{w}\in U\Rightarrow c_1=c_2=...=c_{n-k}=0$

$$a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...,+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k+c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}=\vec{0}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...,+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k=\vec{0}$$

אבל $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\}$ בסיס ל U. אזי $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\}$ - בת"ל , אזי

$$a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...,+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k=\vec{0}\Rightarrow a_1=a_2=...=a_{m-k}=b_1=b_2=...=b_k=0$$

מכאן נובע ש
$$a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...,+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k+c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow a_1=a_2=...=a_{m-k}=b_1=b_2=b_k=c_1=c_2=...=c_{n-k}=0$$

אזי $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$-בת"ל.

2). נוכיח ש $U+V=span\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$

נזכיר ש $U=span\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\},V=span\{\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k\}$ אזי

$$\forall\vec{u}\in U,\vec{u}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+b_1\vec{w}_1+b_2\vec{w}_2+...+b_k\vec{w}_k$$
$$\forall\vec{v}\in V,\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}+d_1\vec{w}_1+d_2\vec{w}_2+...+d_k\vec{w}_k$$
$$\forall\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\in U+V;\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...+a_{m-k}\vec{u}_{m-k}+(b_1+d_1)\vec{w}_1+(b_2+d_2)\vec{w}_2+...+(b_k+d_k)\vec{w}_k+c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_{n-k}\vec{v}_{n-k}$$

אזי וקטור כלשהו מתוך $U+V$ הוא צירוף ליניארי של איברי הקבוצה $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$,אזי $U+V=span\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$.

מ 1). ו -2) נובע ש $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_{m-k},\vec{w}_1,\vec{w}_2...,\vec{w}_k,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_{n-k}\}$-בסיס ל $U+V$ ואז $\dim(U+V)=m+n-k=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\bigcap V)$.

12.4 הגדרה: יהיו U ו- V . שני (תת-)מרחבים וקטוריים. $U+V$ נקרא **סכום ישיר** של U ו- V אם $U\bigcap V=\{\vec{0}\}$.
הסימון $U\oplus V$

12.5 מסכנה: $\dim(U\oplus V)=\dim(U)+\dim(V)$

12.6 משפט: $\forall\vec{w}\in U\oplus V$ ניתן לרשום $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v},\vec{u}\in U,\vec{v}\in V$ באופן יחיד
הוכחה: נניח $\vec{w}=\vec{u}_1+\vec{v}_1=\vec{u}_2+\vec{v}_2$ אזי $\vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_1$

$$\vec{u}_1-\vec{u}_2\in U;\vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_1\Rightarrow\vec{u}_1-\vec{u}_2\in V\Rightarrow\vec{u}_1-\vec{u}_2\in U\bigcap V=\{\vec{0}\}\Rightarrow\vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{0}\Rightarrow\vec{u}_1=\vec{u}_2$$
$$\vec{v}_2-\vec{v}_1\in V;\vec{u}_1-\vec{u}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_1\Rightarrow\vec{v}_2-\vec{v}_1\in U\Rightarrow\vec{v}_2-\vec{v}_1\in U\bigcap V=\{\vec{0}\}\Rightarrow\vec{v}_2-\vec{v}_1=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}_1=\vec{v}_2$$

12.7 טענה: יהיו $U=span\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_m\},V=span\{\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_n\}$ אזי $U+V=span\{\vec{u}_1,\vec{u}_2...,\vec{u}_m,\vec{v}_1,\vec{v}_2...,\vec{v}_n\}$

דוגמא:

יהיו $V=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ $U=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$. מצא בסיס ומימד של $U+V,U\bigcap V$

פתרון:

1). עבור $U+V$ בונים מטריצה $\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\1&-1&-1&0\end{bmatrix}$. מדרגים מטריצה. וקטורים במטריצה מקורית שנמצאים בעמודות PIVOT מהווים בסיס ל $U+V$.

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\1&-1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&-1&-3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&0\end{bmatrix}$$

יש מקומות PIVOT בשלוש העמודות הראשונות אזי $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ מהווים בסיס ל $U+V$

$$U+V=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\Rightarrow U+V=\mathbf{R}^3$$

$$\dim(U+V)=3$$

2). עבור $U\bigcap V$: $U=span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}V=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\};\vec{x}\in U\bigcap V\Rightarrow(1)\vec{x}=a_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix};(2)\vec{x}=b_1\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

אזי קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית $a_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ עבור הנעלמים a_1,a_2,b_1,b_2

פותרים מערכת משוואות הומוגנית $\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&0\\0&1&1&1&0\\1&-1&-1&0&0\end{array}\right]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1|0 \\ 0 & 1 & 1 & 1|0 \\ 1 & -1 & -1 & 0|0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1|0 \\ 0 & 1 & 1 & 1|0 \\ 0 & -1 & -3 & -1|0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1|0 \\ 0 & 1 & 1 & 1|0 \\ 0 & 0 & -2 & 0|0 \end{bmatrix}$$

$a_1 = -t$

$a_2 = -t$

$b_1 = 0$

$b_2 = t$

מציבים a_1, a_2 ל- (1) או b_1, b_2 ל- (2) ואז מקבלים

$$\vec{x} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = b_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \Rightarrow U \bigcap V = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\} \Rightarrow U \bigcap V = span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$\dim(U \bigcap V) = 1$