מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

פתרון תרגיל חובה 12

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

7.2

$\bar{x} \neq \bar{0}$, $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\bar{x}=\lambda\cdot\bar{x}$. לפי המטריצה הנתונה , $\bar{x}$ בעל שיעורים שווים

(השורות של המטריצה שוות) . ניקח ,למשל ,את $\bar{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. נקבל $\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=6\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

7.6

נחשב את ערכים עצמיים של $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. הפולינום האופייני $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{bmatrix}$

המשוואה האופיינית $\det\begin{bmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{bmatrix}=0$. נקבל $\lambda^2-(a+b)\lambda+(ad-bc)=0$.

לפי נוסחאות וייטה $\lambda_1\cdot\lambda_2=ad-bc$, $\lambda_1+\lambda_2=a+b$.

נבטא $\lambda_1\cdot\lambda_2=\det A$, $\lambda_1+\lambda_2=traceA$.

לפי הנתון ,נקבל $\lambda_1+\lambda_2=2, \quad \Rightarrow \quad -3+\lambda_2=2\Rightarrow \quad \lambda_2=5$.

7.9

(ג) $\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&-1\\0&3-\lambda&6\\0&0&4-\lambda\end{bmatrix}=0$

הערכים העצמיים של A $(3-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=3,\lambda=3,\lambda=4$

נחשב את וקטורים עצמיים המתאימים ל- $\lambda=3$ (נפתור את המשוואה $(A-3I)\bar{x}=\bar{0}$:

$$\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&0&6\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \quad x_3=0, \quad x_2=-x_3=0, x_1\neq 0$$

הוקטורים העצמיים המתאימים ל- $\lambda=3$ הם $\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\0\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad x_1\neq 0$

נחשב את וקטורים עצמיים המתאימים ל- $\lambda=4$ (נפתור את המשוואה $(A-4I)\bar{x}=\bar{0}$:

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \qquad x_2=-6x_3, \quad x_1=-7x_3=0, x_3\neq 0$$

הוקטורים העצמיים המתאימים ל- $\lambda=3$ הם $x_3\neq 0$, $\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-7\\ -6\\ 1\end{bmatrix}$.

7.10

(א) $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda & 0 & 1\\ -2 & 1-\lambda & 0\\ -2 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (4-\lambda)(1-\lambda)^2+2(1-\lambda)=0$

$$(1-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda)+2)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1, \lambda=2, \lambda=3 \ .$$

$$\lambda=2\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Rightarrow y=z=t, x=-0.5t\Rightarrow$$

$$\vec{X}_2=t\begin{bmatrix}-0.5\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

7.13

(א) נרשום את המטריצה המייצגת את הטרנספורמציה : $\begin{bmatrix}5x\\ 2x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$,

הערכים העצמיים של $A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (וגם של הטרנספורמציה) : $\lambda_1=5, \quad \lambda_2=1$.

נחשב את וקטורים עצמיים של הטרנספורמציה המתאימים ל- $\lambda_1=5$.

$$(A-5I)\cdot\bar{x}=\begin{bmatrix}5-5 & 0\\ 2 & 1-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{3}{2}x_2, \quad x_2\neq 0$$

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix}x_2, \quad x_2\neq 0$$

נחשב את וקטורים עצמיים של הטרנספורמציה המתאימים ל- $\lambda_1=1$.

$$(A-I)\cdot\bar{x}=\begin{bmatrix}5-1 & 0\\ 2 & 1-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\bar{0} \quad \Rightarrow \quad x_1=0, \quad x_2\neq 0$$

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x_2, \quad x_2\neq 0 \ .$$