

המכללה האקדמית בתל-חי

החוג לכלכלה וניהול

אלגברה ליניארית

חוברת תרגילים

בעריכת:

ד"ר אנטולי ספיבקובסקי, ד"ר ולדימיר ספיבקובסקי

ד"ר גריגורי יום-דין

תוכן עניינים

1	פרק 1: וקטורים
6	פרק 2: מטריצות
11	פרק 3: דטרמיננטות
16	פרק 4: מערכות משוואות ליניאריות
19	פרק 5: מרחבים וקטוריים
21	פרק 6: תכנון ליניארי

פרק 1 - וקטורים

1. עבור אילו ערכי הנעלמים הוקטורים a ו- b שווים.

(א) $a = (x^2 + y^2, 7)$, $b = (25, x + y)$;

(ב) $a = (0, x-2, -5)$, $b = (x + y, y, z-5)$;

(ג) $a = (4, 0, n^2, n^2+1)$, $b = (n^2, 0, 2n, 5)$;

תשובה: (א) $x = 3$, $y = 4$; (ב) $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$; (ג) $n = 2$.

2. מצא את הסקלרים x, y ו- z אם ידוע ש-

(א) $x \cdot (1, 1, 1) + y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 0) = (2, -3, 4)$

(ב) $x \cdot (1, 1, 0, 0) + y \cdot (0, 0, -1, 1) + z \cdot (0, 1, 1, -1) = (-1, 3, 3, -3)$

תשובה: (א) $x = 4$, $y = -7$, $z = 5$; (ב) $x = -1$, $y = 1$, $z = 4$.

3. האם הוקטורים הבאים ניצבים זה לזה:

(א) $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 0)$; (ב) $(3, -4, 1)$, $(5, 4, 1)$.

תשובה: (א) לא ; (ב) כן.

4. נתונים הווקטורים: $a = (1, 3, -2, 2)$, $b = (1, -1, -1, 3)$ ו- $c = (2, -1, 0, -3)$.

מצא: (א) $a \cdot c$; (ב) $(b+c) \cdot a$; (ג) $\|c\|$.

תשובה: (א) -7 ; (ב) -1 ; (ג) $\sqrt{14}$.

5. עבור איזה ערך של הפרמטר k הוקטורים a ו- b ניצבים זה לזה?

(א) $a = (k, -3, 2)$ ו- $b = (1, 2, -k)$;

(ב) $a = (3, k, -3, k)$ ו- $b = (1, 7, k+2, -2)$;

תשובה: (א) $k = -6$; (ב) $k = 1.5$.

6. קבע את k כך שאורך הווקטור $U = (1, k, -2, 5)$ הוא $\sqrt{39}$.

תשובה: $k = \pm 3$.

7. מצא את וקטור היחידה w בכיוון של W אם ידוע ש- $W = (4, -2, -3, 8)$.

תשובה: $w = \left(\frac{4}{\sqrt{93}}, -\frac{2}{\sqrt{93}}, -\frac{3}{\sqrt{93}}, \frac{8}{\sqrt{93}} \right)$.

8. מצא את המרחק $d(u, v)$ וזווית α בין הוקטורים $u = (3, -5, 4)$, $v = (6, 2, -1)$.

תשובה: $\alpha = 84,93^\circ$; $d(u,v) = \sqrt{83}$

9. נתונים הוקטורים: $a = (2,3,-1)$, $b = (1,-2,3)$, ו- $c = (2,-1,1)$

מצא וקטור d המקיים בו זמנית שלושה תנאים הבאים: $c \cdot d = -6$, $a \perp d$, $b \perp d$

תשובה: $(-3,3,3)$

בבעיות 10-13 נתונים הוקטורים $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

10. חשב (א) $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$, (ב) $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \right) \mathbf{a}$

תשובה: (א) $\frac{7}{5}$; (ב) $\begin{bmatrix} -14/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$

11. מצא וקטור יחידה \mathbf{u} בכיוון של \mathbf{c}

תשובה: $\begin{bmatrix} 4/\sqrt{29} \\ -3/\sqrt{29} \\ 2/\sqrt{29} \end{bmatrix}$

12. הראה כי \mathbf{d} ניצב ל- \mathbf{c}

13. השתמש בתוצאות הבעיות 11 ו-12 והסבר מדוע \mathbf{d} חייב להיות ניצב לוקטור היחידה \mathbf{u}

14. כתוב את הוקטור $b = (3,5,4)$ כצירוף ליניארית של הוקטורים

$$a_1 = (1,3,4), a_2 = (2,-1,5), a_3 = (1,2,4)$$

תשובה: $b = -6a_1 - a_2 + 11a_3$

15. כתוב את הוקטור $b = (2,5,-3)$ כצירוף ליניארית של הוקטורים

$$a_1 = (1,-1,-1), a_2 = (1,-1,1), a_3 = (1,1,1)$$

תשובה: $b = 2.5a_1 - 4a_2 + 3.5a_3$

16. נתונים שלושה וקטורים $a = (1,-2,3)$, $b = (2,3,-1)$, $c = (-2,1,5)$. מצא וקטור d שהוא צירוף

ליניארי של a ו- b (כלומר $d = ma + nb$) והוא ניצב ל- c

תשובה: $d = n \cdot \left(\frac{28}{11}, \frac{21}{11}, \frac{7}{11} \right)$

17. יהיו $f = (7, -2)$, $b = (3, 7, 8)$, $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (1, -6, 1)$, $a_3 = (3, 7, 8)$. מצא כל הערכים של f (אם קיימים כאלה) עבורם b הוא צירוף ליניארי של וקטורים a_1, a_2, a_3 .

תשובה: 15

18. קבע אם הוקטורים $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 3)$, $u_3 = (1, -5, -3)$ תלויים או בלתי תלויים ליניארית.

תשובה: בלתי תלויים.

19. קבע את k כך ששלושת הוקטורים $u_1 = (2, -3, 0)$, $u_2 = (0, 3, 1)$, $u_3 = (k, 0, -2)$ יהיו תלויים ליניארית.

תשובה: -4

20. האם הוקטורים הבאים מהווים בסיס של \mathbb{R}^4 ?

$$u_1 = (2, 3, 0, -1), u_2 = (1, 2, -1, -2), u_3 = (1, 2, 1, 3), u_4 = (1, 3, -1, 0)$$

נמק את תשובתך.

תשובה: לא

21. יהיו u, v, w - וקטורים ב- \mathbb{R}^n . הוכח:

אם u, v, w וקטורים בלתי תלויים ליניארית, אז גם וקטורים $(u+v), (u+w), (v+w)$ בלתי תלויים.

22. נתונים שלושה וקטורים a, b, c שהם בלתי תלויים ליניארית. מהם מרכיבים את שלושת הוקטורים הבאים: $u = pa - mc$, $v = mb - na$, $w = nc - pb$ (הם פרמטרים). הראה כי הוקטורים u, v, w הם תלויים ליניארית.

23. נתונים שלושה וקטורים a, b, c שהם בלתי תלויים ליניארית. מהם מרכיבים את שלושת הוקטורים הבאים: $u = 2c - a - b$, $v = 2b - c - a$, $w = 2a - b - c$. האם u, v, w תלויים ליניארית? נמק את תשובתך.

תשובה: כן

$$24. \text{ נתונים הוקטורים הבאים ב- } \mathbb{R}^4: u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ p-3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ (p-4)(6-p) \end{pmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכים של הפרמטר p ניתן לרשום את הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ p \end{pmatrix}$ כצירוף ליניארי של

$$? u_1, u_2, u_3$$

(ב) עבור איזה ערך של p וקטור v יהיה ניצב לוקטור u_2 ?

תשובה: (א) $p=6$ או $p=5$; (ב) $p = -14/3$

25. נתונים וקטורים: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ p \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} p^2 - 2p - 1 \\ 2p^2 - 5p \\ p - 5 \\ p^2 + 2 \end{pmatrix}$. עבור אילו ערכים של p

הוקטור u_3 תלוי ליניארית בוקטורים u_1, u_2 ?

26. מצא לאיזה ערכים של h הוקטור y שייך לפרוש של $\{v_1, v_2, v_3\}$, אם

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$$

תשובה: y שייך לפרוש של $\{v_1, v_2, v_3\}$ אם ורק אם $h = 5$.

27. נתונים הוקטורים $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $u_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(א) בדוק כי הוקטורים u_1, u_2, u_3 בלתי תלויים ליניארית.

(ב) הראה כי הוקטורים הנתונים תלויים ליניארית.

28. נתונים ארבעה וקטורים $u_1 = (3, 5, -4)$, $u_2 = (2, 6, -1)$, $u_3 = (1, -2, 5)$, $u_4 = (-3, 0, 2)$.

(א) בחר מהוקטורים האלה בסיס של מרחב.

(ב) בטא את הוקטור שלא נכנס לבסיס כצירוף ליניארי של וקטורים מהבסיס.

29. נתונים שלושה וקטורים $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 6, 2)$, $v_3 = (k, 0, 4)$. קבע את k , כך ששלושת

הוקטורים יהיו תלויים ליניארית.

תשובה: -12

30. חזור וענה על הסעיפים (א), (ב) מהשאלה 28 אם ארבעת הוקטורים הנתונים הם $\mathbf{u}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (4, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 6)$, $\mathbf{u}_4 = (7, 4, -8)$.

תשובה:

(א) כל שלישייה מהוקטורים הללו מהווה בסיס.

(ב) נבטא, למשל, את הוקטור \mathbf{u}_4 באמצעות הבסיס $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$: $\mathbf{u}_4 = -\frac{3}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{5}{2}\mathbf{u}_2 - \frac{7}{4}\mathbf{u}_3$.

31. הראה שהוקטורים:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

:

$$e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

הוראה הראה שהוקטורים האלו פורשים את R^n והשתמש במשפט הטוען שווקטורים הפורשים את R^n ומספרם n , בהכרח גם בלתי תלויים ליניארית (ולכן מהווים בסיס).

פרק 2 - מטריצות

$$1. \text{ מצא } x, y, z \text{ אם } \begin{bmatrix} z & 3x \\ 2x & y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

תשובה: $\{(1, 7, 6), (2, 8, 6)\}$.

$$2. \text{ מצא } w, z, y, x \text{ אם } \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

תשובה: $w=3, z=1, y=4, x=2$.

$$3. \text{ נתונות המטריצות } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ מצא מטריצה } D \text{ המקיימת את}$$

$$\text{השוויון: } 2A + B(-1) + D = C$$

$$\text{תשובה: } D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$4. \text{ מצא את ערכי הנעלמים אם } \begin{pmatrix} x-3 & t+1 & 9 \\ v+1 & -3 & 5 \\ -4 & w-1 & 2z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-3x & 2 & v^2 \\ 4 & y-1 & 5 \\ u & -1 & z+2 \end{pmatrix}$$

תשובה: $w=0, v=3, u=-4, t=1, z=3, y=-2, x=1$ או 3 .

$$5. \text{ חשב } \dots = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{\frac{1}{200}} & 0 \\ -\sqrt{8} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. \text{ חשב } AB, AC \text{ כאשר } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. \text{ נתון } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ בדוק כי } AB = AC \text{ , למרות ש- } B \neq C$$

8. חשב את המכפלות הבאות או קבע שהמכפלה אינה מוגדרת:

$$(0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot (\tau ; \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot (\lambda ; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot (\beta ; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0.5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot (\alpha$$

$$\text{תשובה : } (\alpha ; \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 14 & 3 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}) \cdot (\beta ; \text{לא קיים}) ; (\lambda ; \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}) \cdot (\tau ; (0 \ 0))$$

$$9. \text{ נתון: } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

הראה כי $AC = A$; $CA = C$; $AB = BA = 0$

10. הוכח כי $(AB)^T = B^T A^T$ (מטריצות A ו-B מסדר 2×2)

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{תשובה : } ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad (\alpha)$$

$$11. \text{ חשב: } \begin{pmatrix} \cos 2a & -\sin 2a \\ \sin 2a & \cos 2a \end{pmatrix} : \text{תשובה : } ; \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^2 \quad (\beta)$$

12. מצא מטריצות A ו-B:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha)$$

$$\text{תשובה : } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad A + 3B = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad (\beta)$$

$$\text{תשובה : } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

13. מצה את מטריצה A אם

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} ; \text{ תשובה} ; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ 11 & 6 & 1 \end{pmatrix} + 2A^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 13 & 13 & 4 \\ 23 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

14. מצא תנאים על מטריצות A ו- B כך ש- $(A^2 - B^2) = (A + B)(A - B)$.

15. מצא $f(A)$ אם

$$; \begin{pmatrix} 75 & 100 \\ 150 & 225 \end{pmatrix} : \text{ תשובה} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; f(x) = 2x^3 - 4x + 5 \text{ (א)}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} : \text{ תשובה} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ; f(x) = x^2 - x + 1 \text{ (ב)}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ כִּי הוֹכַח שֶׁ} \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ סְקָלָרִים כְּלִשְׁהֶם. הוֹכַח כִּי}$$

17. נתונות המטריצות

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

הוכח:

$$\cdot AB \neq BA \text{ (ב)}, A^2 = A \cdot A = A, B^2 = B \cdot B = B \text{ (א)}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix}^2 \text{ חשב } 18.$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{ תשובה}$$

$$\cdot 3A - B = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ -4 & -13 \end{bmatrix}, -5A + 2B = \begin{bmatrix} -15 & -18 \\ 9 & 21 \end{bmatrix} : \text{ מצא מטריצות } A \text{ ו-} B \text{ אם מתקיים: } 19.$$

$$\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} : \text{ תשובה}$$

$$20. \text{ נתונות המטריצות } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ חשב את המטריצה}$$

$$\cdot D = [3B + (AC)^T]^T$$

$$.D = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 22 & -9 \end{bmatrix} \text{ תשובה:}$$

21. הבא את המטריצות A ו- B לצורה מדורגת ואז לצורתה הקנונית כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 6 & -5 & 7 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

תשובה:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -11 & 10 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ מדורגות}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{10}{11} & \frac{15}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \text{ קנוניות}$$

22. הבא את המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ לצורה מדורגת, ולאחר מכן לצורה קנונית.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1 & -11/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ צורה קנונית, } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ תשובה: צורה מדורגת}$$

כעת נבנה כי נתונה מטריצה ריבועית A . אם קיימת מטריצה ריבועית B המקיימת $AB = BA = I$ אזי A נקראת הפיכה. B נקראת המטריצה ההפכית ל- A , והיא מסומנת $B = A^{-1}$. לא לכל מטריצה ישנה מטריצה הפכית.

23. מצא מטריצות הפיכות למטריצות הבאות:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix} \text{ תשובה: } ; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

24. בנה מטריצה הפכית למטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

תשובה: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & -9 & 18 \\ 3 & 15 & -24 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

25. הוכח כי $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

26. הוכח שאם A ו- B שתי מטריצות הפיכות אז $A \cdot B$ - הפיכה ו- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

27. הוכח שאם מטריצה A היא ריבועית כלשהי אז $(A - A^T)$ אנטיסימטרית.

28. תהינה A ו- B מטריצות סימטריות. הראה ש- AB היא סימטרית אם ורק אם A ו- B מתחלפות.

29. $A_{n \times n}$ מטריצה אנטי-סימטרית, $P_{n \times n}$ ריבועית. הוכח שהמטריצה $Q = P^T A P$ היא אנטיסימטרית.

30. בניח ש- A ו- B אורטוגונליות. הוכח כי AB היא גם אורטוגונלית.

31. מצה מטריצה אורטוגונלית $P_{2 \times 2}$ אשר שורתה הראשונה היא $\left(\frac{2}{\sqrt{29}} \quad \frac{5}{\sqrt{29}} \right)$.

תשובה: $P^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ -\frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}; P^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ \frac{5}{\sqrt{29}} & -\frac{2}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$.

32. בדוק כי המטריצה $A = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{11} & 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$ היא אורתוגונלית.

33. הוכח כי אם A היא מטריצה סימטרית אז גם A^2 היא סימטרית.

34. מצא מטריצה A עם איברי אלכסון חיוביים כך ש- $A^2 = B$ אם $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

תשובה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

פרק 3 – דטרמיננטות

$$1. \text{ חשב } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

תשובה: 42- . רמז: ניתן לפרק, למשל, לפי שורה 1.

$$2. \text{ חשב (א) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} \quad \text{(ב) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(ג) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

תשובה: (א) 2 ; (ב) 27 ; (ג) 9

$$3. \text{ חשב (א) } \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix} \quad \text{(ב) } \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ -e^x & e^{-x} \end{vmatrix} \quad \text{(ג) מצא את ערכי } k \text{ שעבורם } \begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

תשובה: (א) 0 ; (ב) 2 ; (ג) 0 או 2.

$$4. \text{ חשב (א) } \begin{vmatrix} a^2-ab & a-b \\ ab-ac & b-c \end{vmatrix} \quad \text{(ב) } \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ -2 & e^{-x} \end{vmatrix}$$

תשובה: (א) 0 ; (ב) 3.

שאלת רשות בסעיף א): האם אפשר היה לדעת את התשובה לפני החישובים?

5. חשב את הדטרמיננטות הבאות בדרך הקצרה ביותר:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & 0 & u \\ 0 & t & 3 & 0 & v \\ g & h & s & 4 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{(ג) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(ב) } \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{(א)}$$

תשובה: (א) -16 ; (ב) -240 ; (ג) 120

6. האם אפשר לחשב דטרמיננטה בעזרת "פירוק לפי אלכסון"?

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{רמז: קח בתור דוגמה את הדטרמיננטה}$$

תשובה: לא. רמז: קח בתור דוגמה את הדטרמיננטה

$$7. \begin{vmatrix} 4t & 2 \\ t & t \end{vmatrix} = 0 \text{ מצא את ערכי } t \text{ שעבורם}$$

תשובה: $t = 0$ או $t = 0.5$.

$$8. \text{ פתור את המשוואה } \begin{vmatrix} 3x^2 + 3x & x^2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 1$$

תשובה: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{3}$.

$$9. \text{ פתור את המשוואות הבאות (א) } \begin{vmatrix} x^2 + 3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ב) } \begin{vmatrix} x^2 - 4 & -1 \\ x - 2 & x + 2 \end{vmatrix} = 0$$

תשובה: (א) אין פתרון ; (ב) 2

10. חשב את הדטרמיננטות הבאות :

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2a + 2m & 2b + 2n & 2p + 2c \\ a & b & c \end{vmatrix} \text{ (ב) } \begin{vmatrix} 1 & a & b + c \\ 1 & b & a + c \\ 1 & c & a + b \end{vmatrix} \text{ (א)}$$

תשובה: (א) 0 ; (ב) 0

$$11. \text{ עבור אילו ערכי } t \text{ הדטרמיננטה הבאה שווה לאפס: } \begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} ?$$

תשובה: $t = 4 ; t = 3 ; t = -2$.

$$12. \text{ נתון כי } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7 \text{ מצא את הדטרמיננטות הבאות:}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d + a & 2e + b & 2f + c \\ g & h & i \end{vmatrix} \text{ (ג); } \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} \text{ (ב); } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} \text{ (א)}$$

תשובה: (א) 35 ; (ב) -7 ; (ג) 14.

$$13. \text{ נתונות הדטרמיננטות } A = \begin{vmatrix} 4 & m & 2 \\ 2 & n & 3 \\ -5 & 6 & 4 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 4 & m+1 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & n-2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \text{ ונתון כי } \det(A) = L$$

העזר בכללי הדטרמיננטות וחשב את $\det(B)$.

תשובה: L - 43.

$$14. \text{ אם } \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ p & -q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10 \text{ , חשב את } \begin{vmatrix} 4b & 4a & c+a \\ -2q & 4p & r+p \\ 2y & 4x & z+x \end{vmatrix}$$

תשובה: -80.

$$15. \text{ אם } \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ x+a & y+b & z+c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 4 \text{ , חשב את } \begin{vmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

תשובה: -2

16. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות מצא ערכי t עבורם מתאפסת הדטרמיננטה:

$$(א) \begin{bmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{bmatrix} ; (ב) \begin{bmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{bmatrix}$$

תשובה: (א) $t_1 = -2, t_2 = 5$; (ב) $t_1 = -2, t_2 = 4$.

17. איזה ערכי x הופכים את הדטרמיננטות הבאות לאפס?

$$(א) \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} ; (ב) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ -2 & x+2 & 0 \\ x & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

תשובה: (א) $x_1 = -1, x_2 = 0$; (ב) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -4$.

$$18. \text{ נתון } L = \begin{vmatrix} x^2 - y^2 & (x-y)^2 & 0 \\ x+y & x-y & 0 \\ x-y & 3x+y & 2y \end{vmatrix} \text{ . הראה כי לכל } x, y \text{ ממשיים } L = 0$$

רמז: השתמש בתכונות דטרמיננטות.

19. נתון כי a ו- b שני מספרים שלמים. הוכח, כי הביטוי הבא מתחלק ב- b ללא שארית:

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

20. נתונות מטריצות A ו- B מסדר 3×3 . חשב $\det(B)$ אם $\det(A) = 2$ ו- $A^{-1}B - 3A = 0$.
תשובה: 108.

21. אם $|A| = -4$, חשב: (א) $|A^{-1}|$, (ב) $|A^4|$.
תשובה: (א) -0.25 ; (ב) 256 .

22. (א) אם $A = A^{-1}$, הוכח כי $|A| = \pm 1$;

(ב) אם $A^T = A^{-1}$, הוכח כי $|A| = \pm 1$.

23. מצא $\text{adj}(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (\tau; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}) \quad (\lambda; \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}) \quad (\beta; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \quad (\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} -24 & -12 & 12 \\ 12 & 6 & -6 \\ -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad (\tau; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}) \quad (\lambda; \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}) \quad (\beta; \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}) \quad (\alpha) \quad \text{תשובה: (א)}$$

$$24. \text{ נתונה המטריצה } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ מצא:}$$

(א) $|B|$; (ב) $\text{adj}(B)$; (ג) מצא B^{-1} באמצעות $\text{adj}(B)$.

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\lambda; \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}) \quad (\beta; -2) \quad (\alpha) \quad \text{תשובה: (א)}$$

$$25. \text{ נתונה מטריצה } A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & a \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(א) עבור אילו ערכי a המטריצה A הפיכה?

(ב) בחר a כלשהו מהתחום שמצאת וחשב A^{-1} בעזרת $\text{adj}(A)$.

תשובה: (א) $a \neq 2$

26. אם $\det(A) = 2$ ו- $\det(B) = 5$ חשב $\det(A^3 B^{-1} A^T B^2)$.

תשובה: 80

פרק 4 - מערכות משוואות ליניאריות

1. פתור את המערכות בעזרת שיטת גאוס:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 8 \\ 2x + 4y - 6z = -5 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \quad (\text{ג}) \quad \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 10 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x - 2y + 2z = 14 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5t = 3 \\ 2x + y - 2z + t = 1 \\ -x - y + z - t = -2 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \quad (\text{ה}) \quad \begin{cases} 3x + 3y + 5z = -6 \\ 2x + y - 2z = 10 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

תשובות: (א) $x=2, y=-1, z=3$; (ב) $x=75/23, y=-2/23, z=1/46$; (ג) אין פתרון;

(ד) $x=1, y=2, z=-3$; (ה) $x=-1, y=19/3, z=10/3$

2. עבור איזה ערכי k יש למערכות הבאות: פתרון יחיד; אין פתרון; אין סוף פתרונות:

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \quad (\text{ג}) \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \\ x - 2y + z + kt = 5 \end{cases} \quad (\text{ה}) \quad \begin{cases} x + y + (k+1)z = k^2 \\ x + (k+1)y + z = k \\ (k+1)x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

תשובות: (א) פתרון יחיד לא קיים; $k=4$ - אין פתרון; $k \neq 4$ - אין סוף פתרונות;

(ב) $k \neq 2, k \neq -3$ - פתרון יחיד; $k = -3$ - אין פתרון; $k = 2$ - אין סוף פתרונות; (ג) תמיד קיים רק

פתרון יחיד; (ד) $k \neq 0, k \neq -3$ - פתרון יחיד; $k = -3$ - אין פתרון; $k = 0$ - אין סוף פתרונות; (ה)

פתרון יחיד לא קיים; $k \neq 5$ - אין פתרון; $k = 5$ - אין סוף פתרונות.

3. פתור את המערכות הבאות בעזרת מטריצה הופכית (A^{-1})

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 5 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} \quad (\text{ג}) \quad \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases} \quad (\text{א})$$

שובות: (א) $x=3, y=-1, z=2$; (ב) $x=2, y=-1, z=0$; (ג) $x=1, y=-3, z=-2$.

4. מה הוא יחס בין a, b, c כדי שלמערכת הבאה יהיה פתרון?

$$\begin{cases} x - y + 3z = a \\ 2x + y - z = b \\ 3x + 3y - 5z = c \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases} \quad (\text{א})$$

תשובות: (א) $5a - 2b - c = 0$; (ב) $-a + 2b - c = 0$

5. פתור את המערכות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 13 \\ 3x + 5y - z = -4 \end{cases} \quad (\text{ג}) \quad \begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 7 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases} \quad (\text{א})$$

תשובות: (א) $x=5, y=1, z=1$; (ב) אין פתרון ; (ג) $x=1, y=-1, z=2$.

6. מצא את הפתרון הכללי למערכות הבאות:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y - 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases} \quad (\text{ב}) \quad \begin{cases} 2x - 4y + 3z - s + 2t = 4 \\ 3x - 6y + 5z - 2s + 4t = 5 \\ 5x - 10y + 7z - 3s + t = 8 \end{cases} \quad (\text{א})$$

תשובה: (א) $y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; (ב) $y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. עבור אילו ערכי t יש למערכת ההומוגנית פתרון לא טריביאלי?

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ tx - 3y + z = 0 \\ x - (t+2)y + 2z = 0 \end{cases}$$

תשובה: $t = -3$; $t = 2$.

8. האם למערכת ההומוגנית הנתונה יש פתרונות לא טריביאליים? אם כן, תאר את קבוצת הפתרונות:

$$\begin{cases} x - 5y + 9z = 0 \\ -x + 4y - 3z = 0 \\ 2x - 8y + 9z = 0 \end{cases} \quad (\text{א}) \quad \begin{cases} 3x + 5y - 4z = 0 \\ -3x - 2y + 4z = 0 \\ 6x + y - 8z = 0 \end{cases}$$

תשובה: (א) כן, לכל $z \neq 0$ קיים פתרון לא טריביאלי מהסוג $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ב) לא.

9. נתונים הווקטורים $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$. האם אפשר לרשום את \mathbf{c} כצירוף ליניארי

של \mathbf{a} ו- \mathbf{b} ?

תשובה: כן, הצירוף הליניארי הוא $2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

פרק 5 - מרחבים וקטוריים

1. הראה ש- W הוא תת-מרחב של R^3 כאשר $W = \{(x,y,z) : z = 0\}$, כלומר W מורכב מוקטורים שלכל אחד מהם הרכיב השלישי הוא אפס.

2. יהי V המרחב וקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר $n \times n$. הוכח ש- W הוא תת-מרחב של

$$W = \{A \in V : A = A^T\}$$

כלומר, כאשר W מורכב מן המטריצות הסימטריות.

3. האם W הוא תת-מרחב של R^3 כאשר $W = \{(x,y,z) : x \cdot y = 0\}$, כלומר W מורכב מאותם וקטורים שלכל מהם המכפלה של הרכיב ראשון ברכיב שני שווה לאפס.

תשובה: לא.

$$4. \text{ יהי } V \text{ הרביע הראשון של מישור } xy. \text{ כלומר: } V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

(א) אם u, v הינם ב- V , האם $u + v$ הינו ב- V ? למה?

(ב) מצא וקטור u ב- V וסקלר c כך ש- cu אינו ב- V (וכך אנו רואים ש- V אינו מרחב וקטורי).

תשובה: (א) כן. רמז: התבונן בסכום של שני וקטורים כלשהם מ- V , והראה ששתי הקואורדינטות של הסכום אי-שליליות.

(ב) רמז: היעזר בסקלר c שלילי.

$$5. \text{ יהי } W \text{ האיחוד של הרביע הראשון והרביע השלישי במישור } xy. \text{ כלומר: } W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : xy \geq 0 \right\}$$

(א) אם u הינו וקטור ב- W ו- c סקלר, האם cu הינו ב- W ? למה?

(ב) מצא וקטורים u, v ב- W כך ש- $u + v$ אינו ב- W (וכך אנו רואים ש- W אינו מרחב וקטורי).

6. קבע האם W הוא תת-מרחב של R^3 או לא כאשר W מורכב מאותם וקטורים $(a,b,c) \in R^3$ שעבורם: (א) $a = b = c$; (ב) $ab = 0$; (ג) $a = b^2$.

תשובה: (א) כן; (ב) לא; (ג) לא.

7. (א) האם המטריצות הבאות בלתי תלויות ליניארית:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ב) אם כן רשום את המטריצה $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ כצירוף ליניארי של המטריצות A, B, C .

תשובה: (א) כן; (ב) $E = 3A - 2B - C$.

8. האם W הוא תת-מרחב של R^2 כאשר W קבוצת הוקטורים של R^2 הנמצאים ברביע הראשון של המישור?

9. מצא בסיס ומימד של מרחב וקטורי V של מטריצות:

(א) סימטריות מסדר 3×3 ; (ב) אנטיסימטריות מסדר 2×2 .

תשובה: (א) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(ב) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. נתון בסיס $S = \{u_1 = (1, -2), u_2 = (4, -7)\}$ של R^2 . מצא את וקטור הקואורדינאטות $[V]$ של

הוקטור V ביחס ל- S כאשר: (א) $V = (3, 5)$; (ב) $V = (a, b)$.

תשובה: (א) $[V] = (-41, 11)$; (ב) $[V] = (-7a - 4b, 2a + b)$.

11. מצא את המימד והבסיס של מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 5z + 3t = 0 \\ 3x + 6y - 7z + 4t = 0 \\ 5x + 10y - 11z + 6t = 0 \end{cases} \quad (\text{ב}); \quad \begin{cases} x + 3y - 2z + 5s - 3t = 0 \\ 2x + 7y - 3z + 7s - 5t = 0 \\ 3x + 11y - 4z + 10s - 9t = 0 \end{cases} \quad (\text{א})$$

תשובה: (א) $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -22 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \dim = 2$; (ב) $y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dim = 2$.

פרק 6 – תכנון ליניארי

בשאלות 1 – 9 השתמש בשיטת פתרון גרפי.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ 1. \text{ תאר באופן גרפי את מערכת האי-שוויונים: } x_2 - x_1 &\leq 7 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. איזה מהגרפים מתארים תחום בלתי חסום ואיזה מהם מתארים תחום חסום?

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \geq x_1 + 7 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{ד}), \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq x_1 + 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{ג}), \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_2 \leq x_1 + 7 \end{array} \right. \quad (\text{ב}), \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq x_1 + 7 \end{array} \right. \quad (\text{א})$$

3. תאר באופן גרפי את מערכת האי-שוויונים. מהי הצורה הגיאומטרית המתקבלת?

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{array} \right. \quad (\text{ד}), \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_2 \leq x_1 + 6 \\ x_2 \geq x_1 + 1 \end{array} \right. \quad (\text{ג}), \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \end{array} \right. \quad (\text{ב}), \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_2 \leq x_1 + 4 \\ x_2 \geq x_1 - 3 \end{array} \right. \quad (\text{א})$$

$$(\text{ה}) \left\{ \begin{array}{l} x_2 \leq x_1 \\ x_2 \geq 4 - x_1 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \text{ שלמים } x_1, x_2$$

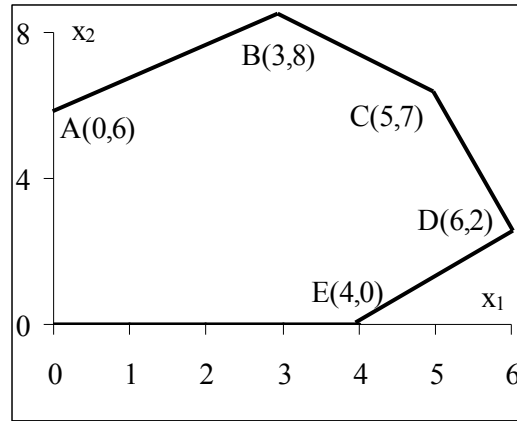
תשובה: (א) מעוין; (ב) קו ישר; (ג) קטע ישר; (ד) חרוט; (ה) קבוצה חסומה של מספרים שלמים.

$$4. \text{ נתונה מערכת אילוצים } \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \end{array} \right. \text{ , ופונקצית המטרה } f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 + 150 \text{ . מצא}$$

את הערך המכסימלי של פונקצית המטרה בתחום פתרונות מערכת האילוצים.

תשובה: ערך מכסימלי $f = 150$ בנקודה $(5, 0)$.

5. מצא את הערך המכסימלי של פונקצית המטרה $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 8x_2$ בתחום הנתון:



תשובה: ערך מקסימלי $f = 76$ מתקבל בקטע $[A, B]$.

6. מבחן פסיכומטרי מורכב מ-3 חלקים. על הנבחן לענות לכל היותר על 12 שאלות מחלק א', לכל היותר על 10 שאלות מחלק ב', ולפחות על 6 שאלות מחלק ג'. בסה"כ חייב הנבחן לענות בדיוק על 20 שאלות. הזמן הכולל של המבחן הוא 2.5 שעות. בפועל יכול הנבחן להקדיש רק שעתיים. הזמן הממוצע שהנבחן מקדיש לכל שאלה והניקוד לכל שאלה נתונים בטבלה 1.

טבלה 1. הזמן הדרוש וניקוד לפי השאלות.

חלק א'	חלק ב'	חלק ג'
4 דקות	6 דקות	8 דקות
5 נקודות	7 נקודות	12 נקודות

במסגרת האילוצים של הבעיה ובהנחה שהנבחן יודע לענות נכון על כל השאלות, אילו שאלות על הנבחן לבחור כדי להגיע לניקוד המקסימלי?

תשובה: ערך מקסימלי $f = 170$ כאשר 10 שאלות מחלק א', 0 שאלות מחלק ב', 10 שאלות מחלק ג'.

7. פתור את השאלה 6 אם הניקוד הוא: 5 נקודות על שאלה מחלק א', 9 נקודות על שאלה מחלק ב', 12 נקודות על שאלה מחלק ג'.

תשובה: ערך מקסימלי $f = 174$ כאשר 6 שאלות מחלק א', 8 שאלות מחלק ב', 6 שאלות מחלק ג'.

$$\min z = -x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \geq 11$$

$$-2x_1 + 5x_2 \geq 6 \quad .8 \text{ נתונה בעיה של תכנון ליניארי:}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(א) פתור את הבעיה בשיטה גרפית;

(ב) כיצד משתנה הפתרון אם מבטלים תנאי אי-שליליות של המשתנים?

ג) כיצד משתנה הפתרון אם מבטלים את האילוץ הראשון?

תשובה: א) אין פתרון כי קבוצת הפתרונות ריקה;

ב) $f_{\min} = 27$ בנקודה $(-5, 16)$;

ג) $f_{\min} = 18$ בנקודה $(2, 2)$.

$$9. \text{ נתונה הבעיה } \begin{cases} z_{\max} = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases} \cdot \text{פתור את הבעיה בשיטה גרפית.}$$

תשובה: $z_{\max} = 58$ בנקודה $(\frac{104}{5}, 0, 0, 2, \frac{28}{5})$.

בשאלה 10 עליך לרשום את הבעיה בצורת בעיה דואלית ולפתור אותה בשיטת פתרון גרפי.

$$\begin{aligned} \min Z &= -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 19x_4 \\ &\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{א. } 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Z &= 12x_1 - 24x_3 - 8x_4 \\ &\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 1 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{ב}) \end{aligned}$$

תשובה: א) $\left\{0, \frac{8}{3}, 0, \frac{7}{3}\right\}$, $z_{\min} = 39$; ב) $\left\{0, \frac{7}{12}, \frac{1}{12}, 0\right\}$, $z_{\max} = -2$.

בשאלה 11 עליך לפתור את הבעיה בשיטת הסימפלקס.

$$\min Z = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 \quad \min Z = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 11x_2 + 9x_3 - 6x_4 \geq -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 8x_4 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{ב} ; \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{א} .11)$$

$$\text{תשובה: (א) } \{15, 0, 0\}, z_{\min} = -1.5 ; \text{(ב) } \{0, 46, 56, 0\}, z_{\max} = -86.$$

בשאלות 12-16 רשום מודל מתמטי ופתור אותו בעזרת שיטת הסימפלקס.

12. בנק מתכנן מדיניות הלוואות מקרן בשווי 60 מיליון ש"י אשר תינתנה למטרות שונות בהתבסס על הנתונים הבאים (טבלה 2).

טבלה 2.

סוג הלוואה	ריבית	הסתברות של חוב אבוד
אישי	0.1	0.08
מכונית	0.09	0.04
בית	0.06	0.04
עסקים קטנים	0.05	0.02

משיקולי תחרות הבנק ישקיע לא פחות מ- 40% מסה"כ קרן הלוואות בהלוואות לעסקים קטנים. הלוואות למימון רכישת בית תהווה לא פחות מ- 50% מסה"כ הלוואות למטרות אישיות, מכונית ובית. חלק של חובות אבודים לא יעלה על 0.04. מטרה של הבנק למכסם רווח שיחושב כהפרש בין תשלומי ריבית לבין הפסד הקרן בגלל חובות אבודים.

רשום מודל מתמטי ופתור אותו בשיטת סימפלקס.

פתרון נסמן, במיליון ש"ח: x_1 - הלוואות מסוג "אישי", x_2 - הלוואות מסוג "מכונית", x_3 - הלוואות מסוג "בית", x_4 - הלוואות מסוג "עסקים קטנים".

נרשום את האילוצים:

$$\text{"קרן בשווי 60 מיליון": } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 60$$

$$\text{"לא פחות מ- 40% מסה"כ קרן הלוואות בהלוואות לעסקים קטנים": } x_4 \geq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

"הלוואות למימון רכישת בית תהווה לא פחות מ- 50% מסה"כ הלוואות למטרות אישיות, מכונית ובית":

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

"חלק של חובות אבודים לא יעלה על 0.04":

$$0.08x_1 + 0.06x_2 + 0.04x_3 + 0.02x_4 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

תנאי אי-שליליות: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

פונקציית המטרה:

$$z = 0.1x_1 + 0.09x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 - 0.08x_1 - 0.04x_2 - 0.04x_3 - 0.02x_4 \rightarrow \max$$

נסדר איברים דומים באילוצים ובפונקציית המטרה ונרשום את הבעיה הבאה הנוחה לפתרון בעזרת שיטת הסימפלקס:

$$f = -0.02x_1 - 0.05x_2 - 0.02x_3 - 0.03x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60, \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 + x_6 = 0, \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 + x_7 = 0, \\ 0.04x_1 + 0.02x_2 - 0.02x_4 + x_8 = 0, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 8 \end{cases}$$

טבלה 1			$C_1 = -0.02$	$C_2 = -0.05$	$C_3 = -0.02$	$C_4 = -0.03$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$
בסיס	C_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
x_5	0	60	1	1	1	1	1	0	0	0
x_6	0	0	0.4	0.4	0.4	-0.6	0	1	0	0
x_7	0	0	0.5	0.5	-0.5	0	0	0	1	0
x_8	0	0	0.04	0.02	0	-0.02	0	0	0	1
$C_0A_i - C_i$		$L=0$	0.02	0.05	0.02	0.03	0	0	0	0

טבלה 2			$C_1 = -0.02$	$C_2 = -0.05$	$C_3 = -0.02$	$C_4 = -0.03$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$
בסיס	C_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
x_5	0	60	0	0	0	2.5	1	-2.5	0	0
x_2	-0.05	0	1	1	1	-1.5	0	2.5	0	0
x_7	0	0	0	0	-1	0.75	0	-1.25	1	0
x_8	0	0	0.02	0	-0.02	0.01	0	-0.05	0	1
$C_0A_i - C_i$		$L=0$	-0.03	0	-0.03	0.105	0	-0.125	0	0

טבלה 3			$C_1 = -0.02$	$C_2 = -0.05$	$C_3 = -0.02$	$C_4 = -0.03$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$
בסיס	C_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
x_5	0	60	0	0	3.333	0	1	1.667	-3.333	0
x_2	-0.05	0	1	1	-1	0	0	0	2	0
x_4	-0.03	0	0	0	-1.333	1	0	-1.667	1.333	0
x_8	0	0	0.02	0	-0.0067	0	0	-0.033	-0.013	1
$C_0A_i - C_i$		$L=0$	-0.03	0	0.11	0	0	0.05	-0.14	0

טבלה 4			$C_1 = -0.02$	$C_2 = -0.05$	$C_3 = -0.02$	$C_4 = -0.03$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$
בסיס	C_0	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
X_3	-0.02	18	0	0	1	0	0.3	0.5	-1	0
X_2	-0.05	18	1	1	0	0	0.3	0.5	1	0
X_4	-0.03	24	0	0	0	1	0.4	-1	0	0
X_8	0	0.12	0.02	0	0	0	0.002	-0.03	-0.02	1
$C_0A_i - C_i$		$L = -1.98$	-0.03	0	0	0	-0.033	-0.005	-0.03	0

תשובה. 18 מיליון ש"ח ליעד להלוואות למכונות, 18 מיליון ש"ח - להלוואות לרכישת בית, ו- 24 מיליון ש"ח - לעסקים קטנים, הרוח הצפוי מחושב כ- 1,98 מיליון ש"ח: $\{0, 18, 18, 24\}$, $z_{\max} = 1.98$.

13. במושב מתכננם את הדרך האופטימאלית להספקת מים משני מאגרים לשלושה גושי מטעים. נתונים על עלות הספקת המים מוצגים בטבלה 3.

טבלה 3. עלות הספקת מים לפי מאגרים וגושי מטעים, ש"ח/מ"ק

מאגר מים	גוש נשירים	גוש כרם	גוש סובטרופיים
מאגר דבש	0.8	0.6	0.5
מאגר עגבנייה	0.7	0.5	0.4

היקף מים להספקה במאגר דבש 300 אלף מ"ק, ובמאגר עגבנייה 250 אלף מ"ק. דרישה למים בגוש נשירים 150 אלף מ"ק, בגוש כרם 200 אלף מ"ק, ובגוש סובטרופיים גם 200 אלף מ"ק. מצא תוכנית אופטימאלית להספקת מים המביאה לעלות מינימלית של הספקת מים לכל שלושת גושי המטעים.

תשובה:

מאגר מים	גוש נשירים	גוש כרם	גוש סובטרופיים
מאגר דבש	0	100	200
מאגר עגבנייה	150	100	0

$$z_{\min} = 315$$

14. כלכלן חברה שפותחת קו ייצור למוצר חדש מתכנן תוכנית פרסומת אופטימאלית בטלוויזיה. הוא שוקל שתי אפשרויות של פרסומת בעזרת סרטונים בזמן שידורים של סדרות קומיות (עלות דקה 20 אלף ש"ח) ובזמן משחקי כדורסל (עלות דקה 50 אלף ש"ח). ההערכה היא שאת הסרטון בזמן סדרה קומית יראו בממוצע 15 אלף גברים ו- 25 אלף נשים, ואילו בזמן משחקי כדורסל יראו את הסרטון 40 אלף גברים ו- 5 אלף נשים. החברה מבקשת שאת הסרטון יראו במשך מסע הפרסום כ- 800 אלף גברים ו- 1,000 אלף נשים. מהי תוכנית בעלת עלות מינימלית לחברה? (לעגל את התשובה).

פתרון נרשום את המודל. נסמן, בדקות: x_1 - משך פרסומת בזמן שידורי סדרות קומיות, x_2 - משך פרסומת בזמן משחקי כדורסל. נניח, לפשטות, ש- (1) הסרטון נמשך דקה אחת; (2) הסרטון ישודר פעם אחת לפני כל סדרה קומית או לפני כל משחק כדורסל שייבחרו למטרה זו; (3) לא משנה כמה פעמים יראה את הפרסומת אותו צופה במשך סדרות/משחקים שונים.

נרשום את האילוצים:

$$15x_1 + 40x_2 \geq 800 \text{ : "את הסרטון יראו במשך מסע הפרסום כ- 800 אלף גברים"}$$

$$25x_1 + 5x_2 \geq 1,000 \text{ : "את הסרטון יראו במשך מסע הפרסום כ- 1,000 אלף נשים"}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ , תנאי אי-שליליות}$$

$$z = 20x_1 + 50x_2 \rightarrow \min \text{ פונקציית המטרה}$$

את המודל אפשר לפתור בשיטה גרפית.

אפשרות אחרת היא לפתור את המודל בעזרת שיטת הסימפלקס אם נרשום את המודל בצורה הבאה:

$$z = 20x_1 + 50x_2 + 10,000x_5 + 10,000x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 40x_2 - x_3 + x_5 = 800, \\ 25x_1 + 5x_2 - x_4 + x_6 = 1,000, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

$$z_{\min} = 1,030, \{39, 5\} \text{ תשובה:}$$

15. משה מעוניין להשקיע עד למיליון ₪ (1,000 אלף ₪) בתיק ההשקעות שיכלול עד 4 סוגי אגרות חוב (טבלה 4).

טבלה 4. נתונים על אגרות חוב.

שם האגרת	סוג	תקופה לפרעון	ריבית שנתית, % לשווי כספי
א	ממשלתי	6	4.0
ב	ממשלתי	4	4.5
ג	קונצרני	4	5.5
ד	קונצרני	5	5.0

מטרת התיק למכסס ריבית שנתית ממוצעת. כמות זמינה של אגרת ג היא 300 אלף ₪ במושגים של שווי כספי. חלק של אגרות חוב קונצרניות בתיק לא יעלה על 50%. תקופה לפרעון ממוצעת לא תעלה על 5 שנים. תחת התנאים הללו מהו הרכב אופטימאלי של התיק?

$$z_{\max} = 49 \text{ (אלף ₪), } \{0, 500, 300, 200\} \text{ (אלף ₪). תשובה:}$$

16. חברה יכולה לייצר מוצר מסוים בעזרת כל אחד משלושת קווי ייצור שברשותה. דרישות לעבודה, להון ולהוצאות שוטפות לייצור יחידת מוצר מוצגות בטבלה 5.

טבלה 5. דרישה לעבודה, להון, ולהוצאות שוטפות ליצירת יחידה אחת של המוצר, לפי קווי ייצור.

קו 3	קו 2	קו 1	הסעיף
2	1	2	עבודה, שעות
40	50	20	הון, ש"ח
20	20	30	הוצאות שוטפות, ש"ח

עלות המשאבים: עבודה – 50 שח/שעה, הון – 10%. כלומר, עלות ייצור יחידת המוצר בקו 1 תחושב כך:
 $2 \cdot 50 + 20 \cdot 0.1 + 30 = 132$. בהצעת תוכנית ייצור אופטימאלית עלינו להגביל את ניצול המשאבים:
 1,400 שעות עבודה, 40,000 שח הון, ו-20,000 שח הוצאות שוטפות. איכות המוצר משתנה מקו לקו, ולכן מחיר היחידה משתנה מקו לקו, גם: קו 1 – 200 שח, קו 2 – 150 שח, קו 3 – 220 שח. מהי תוכנית הייצור המביאה רווח מקסימלי לחברה?

תשובה: תוכנית הייצור $\{0, 400, 500\}$, $z_{\max} = 78$ (אלף שח).