מכון אקדמי טכנולוגי חולון
המחלקה למדעים
הקורס : **פונקציות מרוכבות ואנליזה הרמונית - 20155**

פתרונות לדף תרגול מס' 8

---

1. <u>טורי החזקות הבאים מתלכדים עם טורי טיילור של הפונקציות המיוצגות על ידם בתחומי התכנסותם משיקולי יחידות :</u>

1.1 טור הנדסי במשתנה מרוכב שמנתו z. התכנסות דורשת מנה$|z|<1$ מנימוק זהה לזה שבמקרה הממשי. גם סכום הטור $\frac{1}{1-z}$ מתקבל בתהליך גבולי זהה לזה שבמקרה הממשי.

1.2 טור הנדסי שמנתו $\frac{z}{2}$. התכנסות דורשת מנה$\left|\frac{z}{2}\right|<1$, כלומר – $ROC=\left\{z:|z|<2\right\}$.

1.3 טור הנדסי שמנתו iz. $ROC=\left\{z:|iz|<1\right\}=\left\{z:|z|<1\right\}$.

1.4 טור הנדסי שמנתו $\frac{z}{2+i}$. התכנסות בתחום $ROC=\left\{z:\left|\frac{z}{2+i}\right|<1\right\}=\left\{z:|z|<\sqrt{5}\right\}$

1.5 הצגה כטור הנדסי מניבה דרישה למנה $\left|\frac{z-3}{1+i}\right|<1$ בכדי שהטור יתכנס, כלומר – $ROC=\left\{z:|z-3|<\sqrt{2}\right\}$. שימו לב : טור טיילור סביב מרכז הפיתוח $z_0=3$ של פונקצית הסכום $\frac{1}{1-\frac{z-3}{1+i}}$ הוא זה המתלכד עם טור החזקות (משיקולי יחידות).

1.6 פונקצית הסכום היא $f(z)=\frac{1}{1-(z-1+3i)}=\frac{1}{2-3i-z}$; הטור הנתון הוא פיתוח טיילור שלה סביב $z_0=1-3i$. $ROC=\left\{z:\ |z-1+3i|<1\right\}$.

1.7 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ הוא טור הנדסי עם מנה z^2. הטור מתכנס, לכן, בתחום $\left\{z:\left|z^2\right|<1\right\}$, שהוא העיגול $\left\{z:|z|<1\right\}$. יש להבחין כי לא ניתן ליישם את מבחן ד'לאמבר ואת מבחן השורש (בגרסתם המוכרת לנו עד כה) לחישוב תחום ההתכנסות של הטור, שכן מקדמי החזקות האי-זוגיות של הטור הם אפסים. האמצעי היחיד שבידינו למציאת תחום התכנסות של הטור הוא, לכן, זיהויו כטור הנדסי.

1.8 $q=\frac{z^{3(n+1)+1}}{z^{3n+1}}=z^3$; $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n+1}=\frac{z^{3\cdot 0+1}}{1-z^3}=\frac{z}{1-z^3}$, $ROC=\left\{z:\left|z^3\right|<1\right\}=\left\{z:|z|<1\right\}$.

מכון אקדמי טכנולוגי חולון
המחלקה למדעים
הקורס : פונקציות מרוכבות ואנליזה הרמונית - 20155

פתרונות לדף תרגול מס׳ 8

2.

2.1 יש להציב $-z^2$ בפיתוח e^z לטור מקלורן: $\exp\left(-z^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-z^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{n!}$ פיתוח מקלורן של e^z מתכנס לכל $z\in \boldsymbol{C}$, לכן תחום ההתכנסות של טור מקלורן הנתון הוא המישור המרוכב כולו.

2.2 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{6n+5}}{(2n+1)!}=z^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{6n+3}}{(2n+1)!}$

2.3 $\left\{z:|z|<5\right\},\quad \frac{1}{z-5}=\frac{-1}{5\left(1-\frac{z}{5}\right)}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n$

2.4

$$\frac{1}{(z-5)(z-i)}=\frac{1}{5-i}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-i}\right)=$$

$$\frac{1}{5-i}\left(-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n-i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right)=\frac{1}{5-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5^{n+1}}-\frac{1}{i^{n-1}}\right)z^n=\frac{1}{-5+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^{n+1}}+(-i)^{n+1}\right)z^n$$

$$ROC=\left\{z:|z|<\min\left(|i|,|5|\right)\right\}=\left\{z:|z|<1\right\}$$

2.5

$$\left(\frac{1}{z-5}\right)'=-\frac{1}{(z-5)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{(z-5)^2}=-\left(\frac{1}{z-5}\right)'$$

ב-2.3 קבלנו: $\frac{1}{z-5}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$.

אז נקבל: $|z|<5,\quad \frac{1}{(z-5)^2}=-\left(\frac{1}{z-5}\right)'=-\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,z^{n-1}}{5^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,z^{n-1}}{5^{n+1}}$.

2.6

2.6 $z^2-(5+2i)z+10i=(z-5)(z-2i)$ לכן, $\frac{z^2-(5+2i)z+10i}{z-5}=z-2i$ לכל $z\neq 5$.
פולינום מהווה באופן טריוויאלי טור חזקות (בעל מספר איברים סופי).

מכון אקדמי טכנולוגי חולון
המחלקה למדעים
<u>הקורס</u> : פונקציות מרוכבות ואנליזה הרמונית - 20155

פתרונות לדף תרגול מס׳ 8

---

3. נארגן פיתוחי סדרות הנדסיות סביב המרכזים הנדרשים עבור $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z-5}$; נקבל את פיתוח $\dfrac{1}{\left(z-5\right)^{2}}=-f\,'\left(z\right)$ – ע״י גזירה איבר-איבר באותו תחום התכנסות :

3.1

$$\frac{1}{z-5}=\frac{1}{-4+\left(z-1\right)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{4}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n}}{4^{n+1}}$$

$$ROC=\left\{z:\left|\frac{z-1}{4}\right|<1\right\}=\left\{z:\left|z-1\right|<4\right\}$$

$$\frac{1}{\left(z-5\right)^{2}}=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n}}{4^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-1)^{n}}{4^{n+1}}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{4^{n+1}}$$

3.2

$$\frac{1}{z-5}=\frac{1}{-5+i+\left(z-i\right)}=\frac{1}{-5+i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-i}{-5+i}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-i\right)^{n}}{\left(5-i\right)^{n+1}}$$

$$ROC=\left\{z:\left|z\right|<dist\left(i,5\right)\right\}=\left\{z:\left|z\right|<\sqrt{26}\right\}$$

$$\frac{1}{\left(z-5\right)^{2}}=\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-i\right)^{n}}{\left(5-i\right)^{n+1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\left(z-i\right)^{n}}{\left(5-i\right)^{n+1}}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(z-i\right)^{n-1}}{\left(5-i\right)^{n+1}}$$

4. בשאלה 3 קיבלנו פיתוחי טיילור של $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z-5}$ סביב מרכזי פיתוח $z_{1}=1$, $z_{2}=i$. נזכור כי המבנה הכללי של טור טיילור סביב מרכז פיתוח $\alpha\in\boldsymbol{C}$ הוא $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(\alpha\right)}{n!}\left(z-\alpha\right)^{n}$. על כן ניתן לחלץ נגזרות מסדר גבוה של $f\left(z\right)$ בנקודה ממקדמי הפיתוח המתאימים :

$$\alpha=1:\quad \frac{f^{(17)}\left(1\right)}{17!}=a_{17}=-\frac{1}{4^{18}}\ \Rightarrow\quad f^{(17)}\left(1\right)=-\frac{17!}{4^{18}}$$

$$\alpha=i:\quad \frac{f^{(17)}\left(i\right)}{14!}=a_{14}=-\frac{1}{\left(5-i\right)^{15}}\ \Rightarrow\quad f^{(14)}\left(i\right)=-\frac{14!}{\left(5-i\right)^{15}}$$