מבחן סוף הסמסטר – "פונקציות מרוכבות" (20155)
המרצים: ד"ר ויקטור גוטליב, ד"ר אנדרי רוזט, ד"ר רומן גוט
סמסטר **א'**, **מועד ב'**, תאריך המבחן: 20/03/2006

שאלה 1.

חשב את האינטגרל $\oint_C \frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz$ **כאשר המסלול C הוא:**

א) המעגל $|z|=4$, **ב) המעגל** $|z-1|=\frac{3}{2}$, **ג) המעגל** $|z-2i|=\frac{3}{2}$.

פתרון

אפסים של מכנה: $e^{\pi z}=-1; \quad \Rightarrow \quad \pi z=\ln 1+i(\pi\pm 2k\pi); \quad \Rightarrow \quad z_k=i(1\pm 2k), \quad k=0,1,...$

$z_{00}=0$ - נקודה נוספת. כולן אפסים פשוטים.

אפסים (פשוטים) של המונה: $z_{1u}=3i,\ z_{2u}=i \quad \Leftarrow \quad z^2-4iz-3=0;$.

א) $\oint_{|z|=4} \frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz$

הנקודות הסינגולאריות שנמצאות בתחום $|z|\le 4$ הן $z_s\in\{0,\pm i,\pm 3i\}$.

סוגי הנקודות: הנקודות $z_4=i,\ z_5=3i$ - הן נקודות סינגולאריות סלקות;

הנקודות $z_{00}=0,\quad z_1=-i,\quad z_2=-3i$ - הן קטבים פשוטים.

ידוע ש- $\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)},\ i\right)=0$, $\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)},\ 3i\right)=0$ (כי אלו נקודות סינגולאריות סלקות).

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)},0\right)=\left.\frac{z^2-4iz-3}{\left(e^{\pi z}+1\right)}\right|_{z=0}=-\frac{3}{2};$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)},-i\right)=\left.\frac{z^2-4iz-3}{e^{\pi z}+1+\pi z e^{\pi z}}\right|_{z=-i}=-\frac{8}{i\pi};$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)},\ -3i\right)=\left.\frac{z^2-4iz-3}{e^{\pi z}+1+\pi z e^{\pi z}}\right|_{z=-3i}=-\frac{8}{i\pi}.$$

$$\oint_{|z|=4}\frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz=2\pi i\left(-\frac{3}{2}-\frac{8}{\pi i}-\frac{8}{\pi i}\right)=-32-3\pi i.$$

ב) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz$

הנקודות הסינגולאריות שנמצאות בתחום $|z-1|\le\frac{3}{2}$ הן $z_1=-i$ $z_0=0,$ ונקודה סליקה $z_4=i$.

$$\oint\limits_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz = 2\pi i\left(-\frac{3}{2}-\frac{8}{\pi i}\right) = -16-3\pi i$$

ג) $\oint\limits_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz$

בתוך התחום $|z-2i|\le\frac{3}{2}$ נמצאות נקודות סינגולארית סלקות בלבד. אזי $\oint\limits_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{z^2-4iz-3}{z\left(e^{\pi z}+1\right)}dz = 0$

שאלה 2.

א) פתח את הפונקציה $(3z-2)e^{\frac{i}{1-z}}$ לטור לורן בתחומים טבעתיים או עגולים אפשריים שמרכזם $z_0=1$.

ב) בכל תחום ש מצאת בסעיף א) ציין (כתוב) בנפרד את המקדמי הטור: c_{-1},c_0,c_1 .

ג)מצא את השארית $\mathrm{Res}\left[(3z-2)e^{\frac{i}{1-z}},1\right]$ על סמך תוצאות שקבלת בסעיף ב)

פתרון

א)

$$(3z-2)e^{\frac{i}{1-z}} = (3(z-1)+1)e^{-\frac{i}{z-1}} = 3(z-1)e^{-\frac{i}{z-1}} + 1\cdot e^{-\frac{i}{z-1}} =$$
$$=3(z-1)\left(1-\frac{i}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)^2}-\frac{i}{3!(z-1)^3}+\cdots\right)+\left(1-\frac{i}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)^2}-\frac{i}{3!(z-1)^3}+\cdots\right)=$$
$$=\left(3(z-1)-3i-\frac{3}{2(z-1)}-\frac{3i}{3!(z-1)^2}+\cdots\right)+\left(1-\frac{i}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)^2}-\frac{i}{3!(z-1)^3}+\cdots\right)=$$
$$=3(z-1)+(1-3i)-\left(\frac{3}{2}+i\right)\frac{1}{(z-1)}-\frac{3i}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots$$

תחום ההתכנסות הוא יחיד: $0<|z-1|<\infty$.

ב) $c_1=3$, $c_0=1-3i$, $c_{-1}=-\left(\frac{3}{2}+i\right)$.

ג) $\mathrm{Res}\left[(3z-2)e^{\frac{i}{1-z}},1\right]=c_{-1}=-\frac{3}{2}-i$.

שאלה 3.

מצא את התמרת פורייה ההפוכה לפונקציה $F(\omega)=\dfrac{1}{(\omega+i)^3\,\omega}$

פתרון

הנקודות הסינגולאריות של הפונקציה $\dfrac{e^{i\omega t}}{(\omega+i)^3\,\omega}$ הן קוטב פשוט $\omega=0$, וקוטב מסדר שלוש $\omega=-i$

ההתמרה ההפוכה $f(t)=\Im^{-1}\left[F(\omega)\right]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+i)^3\,\omega}d\omega$

א) מקרה $t>0$.

מתחשבים בנקודות הסינגולאריות $\operatorname{Re}(\omega_s)\ge 0$, זאת אומרת $\omega=0$ בלבד.

$$f(t)=\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega(\omega+i)^3},0\right)=\left.\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+i)^3}\right|_{\omega=0}=\frac{\pi}{-i}i=-\pi\ .$$

ב) מקרה $t<0$.

כאן מתחשבים בנקודות הסינגולאריות $\operatorname{Re}(\omega_s)\le 0$, זאת אומרת $\omega=0$ ו- $\omega=-i$ ביחד.

$$f(t)=-2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega(\omega+i)^3},-i\right)-\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega(\omega+i)^3},0\right)=$$

$$=-2\pi i\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\omega^2}\left.\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega}\right)\right|_{\omega=-i}-\pi i\left.\frac{e^{i\omega t}}{(\omega+i)^3}\right|_{\omega=0}=-\pi i\left.\frac{e^{i\omega t}\left[\left(it(it\omega-1)+it\right)\omega^2-2\omega(it\omega-1)\right]}{\omega^4}\right|_{\omega=-i}+\pi=$$

$$=\pi\left[1-e^{-t}\left(t^2-2t+2\right)\right]$$

ג) מקרא $t=0$

$$f(0)=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0+}f(t)+\lim_{t\to 0-}f(t)\right)=-\pi$$

תשובה סופית:

$$f(t)=\begin{cases}-\pi, & t\ge 0\\ \pi\left[1-e^{-t}\left(t^2-2t+2\right)\right], & t<0\end{cases}$$

<u>שאלה 4.</u>

בעזרת משפט השארית חשב את:

א) התמרת- Z הפוכה לפונקציה $F(z)=\dfrac{2z}{1+9z^2}$ **. בטא את התוצאה ללא יחידה מדומה** I**;**

ב) התמרת לפלס הפוכה לפונקציה $F(s)=\dfrac{3e^{-2s}}{(1-3s)^2 s}$.

<u>פתרון</u>

א) הנקודות הסינגולאריות של הפונקציה $G(z)=F(z)\cdot z^{n-1}=\dfrac{2z^n}{1+9z^2}$ הן קטבים פשוטים $z_{1,2}=\pm\dfrac{i}{3}$.

$$u_n=\boldsymbol{Z}^{-1}\{F(z)\}=\mathrm{Res}\left(\frac{2z^n}{1+9z^2},\frac{i}{3}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{2z^n}{1+9z^2},-\frac{i}{3}\right)=\left.\frac{z^{n-1}}{9}\right|_{z=\frac{i}{3}}+\left.\frac{z^{n-1}}{9}\right|_{z=-\frac{i}{3}}=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{i}{3}\right)^{n-1}+\left(-\frac{i}{3}\right)^{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(i^{n-1}+(-i)^{n-1}\right)=\frac{1}{3^{n-3}}\left(e^{\frac{\pi}{2}(n-1)i}+e^{-\frac{\pi}{2}(n-1)i}\right)=\frac{2}{3^{n-3}}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}(n-1)i}+e^{-\frac{\pi}{2}(n-1)i}}{2}=\frac{2}{3^{n-3}}\cos\frac{\pi(n-1)}{2}.$$

תשובה סופית: $\underline{u_n=\boldsymbol{Z}^{-1}\left\{\dfrac{2z}{1+9z^2}\right\}=\dfrac{2}{3^{n-3}}\cos\dfrac{\pi(n-1)}{2}}$

ב) הנקודות הסינגולאריות של הפונקציה $G(s)=F(s)\cdot e^{st}=\dfrac{3e^{s(t-2)}}{(1-3s)^2 s}$ הן קטב פשוט $s_1=0$ וקוטב מסדר שני ן $s_2=\dfrac{1}{3}$.

$$\boldsymbol{L}^{-1}\{F(s)\}\overset{t-2>0}{=}\mathrm{Res}\left(\frac{3e^{s(t-2)}}{9\left(s-\frac{1}{3}\right)^2 s},0\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{3e^{s(t-2)}}{9\left(s-\frac{1}{3}\right)^2 s},\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\left.\frac{e^{s(t-2)}}{3\left(s-\frac{1}{3}\right)}\right|_{s=0}+\left.\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{s(t-2)}}{3s}\right)\right|_{s=\frac{1}{3}}=-3+\left.\frac{(t-2)e^{s(t-2)}s-e^{s(t-2)}}{3s^2}\right|_{s=\frac{1}{3}}=(t-5)e^{\frac{1}{3}(t-2)}-3$$

תשובה סופית: $\underline{\boldsymbol{L}^{-1}\left\{\dfrac{3e^{-2s}}{(1-3s)^2 s}\right\}=f(t)=\begin{cases}(t-5)e^{\frac{1}{3}(t-2)}-3 & t\ge 2\\ 0, & t<2\end{cases}}$

שאלה 5

חשב את האינטגרלים הבאים:

א) $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x(4x^2+1)}dx$ **ב)** $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2(4x^2+1)}dx$

פתרון

א)
$$I_1 = PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x(4x^2+1)}dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x(4x^2+1)}dx\right) = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{4x\left(x-\frac{i}{2}\right)\left(x+\frac{i}{2}\right)}dx\right)$$

הנקודות הסינגולאריות של הפונקציה $\frac{e^{2iz}}{z(4z^2+1)}$ הן קטבים פשוטים $z_0=0,\ z_{1,2}=\pm\frac{i}{2}$.

מפני שהמקדם במעריך $2>0$ מתחשבים כן רק בנקודות הסינגולאריות $\mathrm{Re}(z_s)\le 0$, זאת אומרת $z_0=0$ ו- $z_1=\frac{i}{2}$ בלבד.

$$I_1 = \mathrm{Im}\left[2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2ix}}{4z\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{i}{2}\right)},\frac{i}{2}\right)+\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{2ix}}{4z\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{i}{2}\right)},0\right)\right]=$$

$$=\mathrm{Im}\left[2\pi i\left.\frac{e^{2iz}}{4z\left(z+\frac{i}{2}\right)}\right|_{z=\frac{i}{2}}+\pi i\left.\frac{e^{2iz}}{(4z^2+1)}\right|_{z=0}\right]=\mathrm{Im}\left[\pi i\left(-\frac{1}{e}+1\right)\right]=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

תשובה סופית: $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x(4x^2+1)}dx=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$

ב) $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2(4x^2+1)}dx$

כאן **מקרה שונה** לגמרי. לפונקצית עזר $\frac{e^{2iz}}{z^2(4z^2+1)}$ יש לה קוטב <u>מסדר **2**</u> על הציר הממשי ($z=0$)!
בגלל זה **<u>אסור</u>** להשתמש בנוסחת משפט השאריות.

אבל ניתן לראות שהפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x}{x^2(4x^2+1)}=-f(-x)$ אי-זוגית, אזי $PV\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2(4x^2+1)}dx=0$.