

מכון אקדמי טכנולוגי חולון המחלקה למדעים

הקורס: פונקציות מרוכבות ואנליזה הרמונית - 20155

דף תרגול מס' 9 - טורי לורן

1. פתחי את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ לטור חזקות (טיילור או לורן) בתחומים הבאים:

1.1 $|z| < 1$

1.2 $1 < |z| < 2$

1.3 $2 < |z|$

1.4 $0 < |z-1| < 1$

1.5 $|z-1| > 1$

1.6 $0 < |z-2| < 1$

1.7 $|z-2| > 1$

2. מצאי פיתוחי לורן בכל התחומים האפשריים לפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ סביב $z_0 = i$

3. חשבי את האינטגרלים $\oint_{|z|=3} f(z) dz$, $\oint_{|2z+1|=6} f(z) dz$ עבור הפונקציות הבאות בהסתמך על תכונותיו של מקדם

לורן c_{-1} שלהן:

3.1 $f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$

3.2 $f(z) = \frac{z+2}{z(z+1)}$

3.3 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$

3.4 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$

3.5 $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$

3.6 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+4)}$

מכון אקדמי טכנולוגי חולון המחלקה למדעים

הקורס: פונקציות מרוכבות ואנליזה הרמונית - 20155

4. נמקי מדוע הטיעון הבא אינו נכון:

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \text{ , וכך כי } \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

$$\text{ידוע כי } \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \text{ , ומכיון ש- } \frac{z}{z-1} + \frac{z}{1-z} = 0 \text{ , מתקיים } 0 = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$$

5. חשב את החלק העיקרי של טור לורן לפונקציה $f(z) = \frac{e^z \cos z}{z^3}$ סביב $z_0 = 0$

תשובות:

$$f(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \frac{15}{16}z^3 + \dots \quad 1.1$$

$$f(z) = \dots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} - \dots \quad 1.2$$

$$f(z) = \dots + \frac{15}{z^5} + \frac{7}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^2} \quad 1.3$$

$$f(z) = \dots - \frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \dots \quad 1.4$$

$$f(z) = \dots + \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2} \quad 1.5$$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3 - \dots \quad 1.6$$

$$f(z) = \dots + \frac{1}{(z-2)^4} - \frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2} \quad 1.7$$

$$0 < |z-i| < 1 \Rightarrow f(z) = -\frac{1}{z-i} - 2i + 3(z-i) - 4i(z-i)^2 - 5(z-i)^3 - \dots \quad 2.1$$

$$|z-i| > 1 \Rightarrow f(z) = \dots + \frac{4i}{(z-i)^6} - \frac{3}{(z-i)^5} - \frac{2i}{(z-i)^4} + \frac{1}{(z-i)^3} \quad 2.2$$

$$0 \quad 3.4 \quad 0 \quad 3.3 \quad 2\pi i \quad 3.2 \quad 0 \quad 3.1$$

$$-\frac{\pi i}{6} \quad 3.6 \quad 2\pi i \quad 3.5$$

4. הסדרה הראשונה מתכנסת עבור $|z| < 1$, והשנייה עבור $|z| > 1$. לפיכך אין ערך מרוכב עבורו שתי הסדרות מתכנסות בעת ובעונה אחת.

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}z + \dots \quad 5.$$