PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

■ סכומים וטורים

1. סכום – מה זה?

יהי a_1, a_2, ..., a_n מספרים כלשהם. הסימון $\sum_{j=1}^{n} a_j$ מסמן את הסכום

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

הסימון $\sum_{i=1}^{n} a_i$ מסמן בדיוק אותו הסכום.

2. מניפולציות עם הסכומים

א. סכום הסכומים

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ב. כפל הסכומים

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j b_k$$

למשל: $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$.

ג. גזירת סכומים

יהי $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ סידרה של n פונקציות גזירות. אזי מתקיים:

$$\frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{df_j(x)}{dx} .$$

3. טורים סופיים ואינסופיים מוכרים

א. $$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ב. $$\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ג. $$\sum_{j=1}^{n} j^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ד. בינום של ניוטון: $\sum_{j=1}^{n} C_n^j a^j b^{n-j} = (a+b)^n$

ה. נוסחא מולטינומית: $\sum_{\substack{n_1\ge 0, n_2 \ge 0, \\ \dots,\ n_k\ge 0 \\ n_1+\dots+n_k=n}} \frac{n!}{n_1!\dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k} = (x_1+\ldots+x_k)^n$

ו. טור הנדסי סופי: $\sum_{j=j_1}^{j_2} q^j = \frac{(\text{איבר ראשון})\cdot(1-\text{מנה}^{\text{מספר האיברים בסכום}})}{1-\text{מנה}} = \frac{q^{j_1}(1-q^{j_2-j_1+1})}{1-q}$.

ז. טור הנדסי אינסופי: $\sum_{j=j_1}^{\infty} q^j = \frac{\text{איבר ראשון}}{1-\text{מנה}} = \frac{q^{j_1}}{1-q}$ עבור $|q|<1$ ו-$j_1 \ge 1$.

3. טורים וטריקים

א. למה שווה הטור $F(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} jq^{j-1}$?

על מנת לחשב את הטור $F(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} jq^{j-1}$, אנו נתחיל מטור הנדסי סופי

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} q^j = \frac{q^{j_1}(1-q^{j_2-j_1+1})}{1-q} = \frac{q^{j_1}-q^{j_2+1}}{1-q}$$

ונגזור אותו על q. גזירה של הצד השמאלי מביאה $\sum_{j=j_1}^{j_2} jq^{j-1} = \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{d}{dq} q^j = \frac{d}{dq}\sum_{j=j_1}^{j_2} q^j$. גזירה של הצד הימני מביאה $\frac{q^{j_1}-q^{j_2}}{(1-q)^2} + \frac{j_1 q^{j_1-1} - j_2 q^{j_2}}{1-q} = \frac{d}{dq}\frac{q^{j_1}-q^{j_2+1}}{1-q}$. כתוצאה, אנו מגיעים למסקנה כי

$$F(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} jq^{j-1} = \frac{j_1 q^{j_1-1} - j_2 q^{j_2}}{1-q} + \frac{q^{j_1}-q^{j_2}}{(1-q)^2}.$$

כאן, $j_1 \ge 1$.

ב. למה שווה הטור $F_\infty(q) = \sum_{j=j_1}^{\infty} jq^{j-1}$?

בהמשך, נניח כי $|q|<1$ ו-$j_1 \ge 1$. ניתן לראות כי $F_\infty(q) = \lim_{j_2\to\infty} F(q)$. כיוון ש-

$$\lim_{j_2\to\infty} \frac{j_1 q^{j_1-1} - j_2 q^{j_2}}{1-q} = \frac{j_1 q^{j_1-1}}{1-q} \text{ ו- } \lim_{j_2\to\infty}\frac{q^{j_1}-q^{j_2}}{(1-q)^2} = \frac{q^{j_1}}{(1-q)^2},$$

אנו מגיעים למסקנה כי

$$F_\infty(q) = \sum_{j=j_1}^{\infty} jq^{j-1} = \frac{j_1 q^{j_1-1}}{1-q} + \frac{q^{j_1}}{(1-q)^2} = \frac{j_1 q^{j_1-1} - (j_1-1)q^{j_1}}{(1-q)^2}.$$