הרצאה 5

התפלגויות בדידות מיוחדות

• התפלגות אחידה • ניסוי והתפלגות ברנולי • התפלגות בינומית ומשפט הפרוק • התפלגות גיאומטרית • התפלגות בינומית שלילית • התפלגות היפרגיאומטרית • התפלגות היפרגיאומטרית שלילית • זרם אירועים פואסוני והתפלגות פואסון • נוסחת סטירלינג • קירוב בינומי להתפלגות היפרגיאומטרי • קירוב בינומי שלילי להתפלגות היפרגיאומטרית שלילית • קירוב פואסון להתפלגות בינומית •

בהרצאה זו נלמד התפלגויות בדידות חשובות המופיעות בתיאור תופעות שונות בטבע.

5.1 התפלגות אחידה

5.1.1 פונקצית הסתברות

הגדרה D5.1

משתנה מקרי בדיד X נקרא בעל **התפלגות אחידה** [uniform distribution] בין 1 ל- N אם הוא מקבל כל אחד מהערכים $1,2,\ldots,N$ בהסתברות $\frac{1}{N}$. כלומר,

$$P_X(x=k)=P(X=k)=\frac{1}{N}$$

עבור $k=1,2,\ldots,N$. אנחנו נסמן משתנה כזה כ- $X\sim U_d(1,N)$.

דוגמא E5.1

בניסוי "הטלת קובייה מאוזנת", משתנה מקרי X = {מספר נקודות על הפאה} הוא משתנה מקרי בדיד בעל התפלגות אחידה בין 1 ל- 6: $X\sim U_d(1,6)$.

5.1.2 פונקצית התפלגות מצטברת

טענה. פונקצית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי $X\sim U_d(1,N)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$F_X(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ \dfrac{\lfloor t\rfloor}{N}, & 1\le t<N\\ 1, & t\ge N\end{cases}$$

כאן, $\lfloor t\rfloor$ מסמן את הפונקציה "חלק שלם של מספר".

הוכחה. מדיאגרמת מקלות עבור פונקצית הסתברות נובע כי

$$F_X(t=k)=P(X\le k)=\sum_{m=1}^{k}P(X=m)=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{N}=\frac{k}{N}.$$

כאן, $k=1,2,\ldots,N$. כמו כן,

$$F_X(k \le t < k+1) = \frac{k}{N}.$$

שתי הנוסחאות האחרונות מוכחות את הטענה. סוף הוכחה.

5.1.3 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X \sim U_d(1,N)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$E[X] = \frac{N+1}{2}.$$

הוכחה. על פי הגדרת התוחלת,

$$E[X] = \sum_x x \cdot P_X(x) = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \frac{1}{N}.$$

ניקח בחשבון כי $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$. אזי,

$$E[X] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

כנדרש. סוף הוכחה.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X \sim U_d(1,N)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$\mathrm{var}[X] = \frac{N^2-1}{12}.$$

הוכחה. על פי הגדרת השונות,

$$\mathrm{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

חישוב:

$$E[X^2] = \sum_x x^2 \cdot P_X(x) = \sum_{k=1}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{N}.$$

מכיוון ש— $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$, אנחנו מקבלים:

$$E[X^2] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}.$$

אזי,

$$\mathrm{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

כנדרש. סוף הוכחה.

שאלה L5.1

חשב/י תוחלת, שונות וסטיית תקן של משתנה מקרי בדיד X = {מספר נקודות על הפאה} בניבוי "הטלת קובייה מאוזנת".

פתרון. $X \sim U_d(1,6)$ כך ש— $N=6$ ו—

$$E[X]=\frac{6+1}{2}=7/2;$$

$$\text{var}[X]=\frac{6^2-1}{12}=35/12\approx 2.92;$$

$$\sigma=\sqrt{\text{var}[X]}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}\approx 1.71.$$

שאלה L5.2

ספירה X נבחרת באופן מקרי. חשב/י תוחלת, שונות וסטיית תקן של משתנה מקרי X.

פתרון. אי אפשר להשתמש ישירות בנוסחאות עבור משתנה מקרי אחיד מפני שכעת X מקבל ערכים בין 0 ל—9. נגדיר את המשתנה החדש $Y=X+1$. הוא מתפלג אחיד בין 1 ל—10. אזי,

$$E[X]=E[Y-1]=E[Y]-1=\frac{10+1}{2}-1=9/2.$$

באותה דרך,

$$\text{var}[X]=\text{var}[Y-1]=\text{var}[Y]=\frac{10^2-1}{12}=\frac{99}{12}=\frac{33}{4}.$$

סטיית התקן

$$\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{33}\approx 2.87.$$

5.2 התפלגות ברנולי [Bernoulli distribution]

5.2.1 ניסוי ופרמטר ברנולי

הגדרה D5.2

ניסוי ברנולי הוא ניסוי בו יתכנו רק שתי תוצאות אפשריות – הצלחה [S - success] וכישלון [F - failure].
נהוג לסמן את ההסתברות להצלחה דרך $P(S)=p$ ואת ההסתברות לכישלון דרך p $P(F)=1-p$ כך ש—$P(S)+P(F)=1$. הפרמטר p נקרא **פרמטר של ניסוי ברנולי**.

דוגמא E5.2

א. הטלת מטבע עם שתי תוצאות אפשריות – "עץ" ו"פלי". עבור מטבע מאוזן, $p=\frac{1}{2}$. עבור מטבע מזויף, הסתברות להצלחה ("עץ") p יכול לקבל כל ערך $0\le p\le 1$.

ב. הטלת קובייה מאוזנת עם ההצלחה המוגדרת כ—{פאה עם 6 נקודות}. במקרה זה, $p=\frac{1}{6}$.

ג. לידת בן או בת, $p=\frac{1}{2}$.

5.2.2 משתנה והתפלגות ברנולי

הגדרה D5.3

משתנה ברנולי $X \sim \text{Ber}(p)$ בעל פרמטר p הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערך 1 במקרה של "הצלחה" ואת הערך 0 במקרה ההפוך של כישלון:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{''הצלחה''} \\ 0, & \text{''כשלון''} \end{cases}$$

הערה R5.1
שמות אחרים של המשתנה: משתנה מצביע, משתנה מציין. משתנה ברנולי מונה את ה"הצלחות".

הגדרה D5.4
התפלגות ברנולי של משתנה ברנולי $X \sim \text{Ber}(p)$ נתונה על ידי פונקצית הסתברות

$$P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p \; .$$

5.2.3 פונקצית התפלגות מצטברת עבור משתנה ברנולי

טענה. יהיה $X \sim \text{Ber}(p)$. פונקצית התפלגות מצטברת היא

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ 1-p, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

הוכחה. יש להשתמש בהגדרה של פונקצית התפלגות מצטברת.

5.2.4 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X \sim \text{Ber}(p)$ נתונה על ידי הנוסחא $E[X] = p$.

הוכחה.

$$E[X] = \sum_x x \cdot P(x) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \; .$$

סוף הוכחה.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X \sim \text{Ber}(p)$ נתונה על ידי הנוסחא $\text{var}[X] = p(1-p)$.

הוכחה.

$$\text{var}[X] = E[X^2] - \Big(\underbrace{E[X]}_{p}\Big)^2 = \sum_x x^2 \cdot P(x) - p^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) \; .$$

סוף הוכחה.

5.3 התפלגות בינומית [Binomial distribution]

5.3.1 משתנה בינומי

הגדרה D5.4

משתנה בינומי $X \sim \text{Bin}(n, p)$ בעל פרמטרים n ו—$0 < p < 1$ הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערכים $k = 0, 1, ..., n$ בהסתברויות

$$.P_X(x=k) = P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

דוגמא E5.3 – **חלק ראשון**

נתבונן במשפחה בת שלושה ילדים שנבחרה מקרית. מבחינת מין הילדים, מרחב המדגם הוא $\Omega = \{MMM, MMF, MFM, MFF, FMM, FMF, FFM, FFF\}$. נגדיר משתנה מקרי X = {מספר בנות במשפחה}. הערכים האפשריים של X הם 0, 1, 2, 3. על פי גישה קלאסית להסתברות ערכים אלה מופיעים בהסתברויות:

X	0	1	2	3
מאורע	MMM	MMF, MFM, FMM	MFF, FMF, FFM	FFF
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ניתן לזהות את ההתפלגות שבטבלה כהתפלגות בינומית בעלת פרמטרים $n = 3$ ו—$p = \frac{1}{2}$ כך ש— $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$. חישוב פשוט מראה כי

$$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \qquad P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}, \qquad P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

הסבר לעובדה זו מגיע מ**משפט הפרוק**.

5.3.2 משפט הפרוק

משפט T5.1 — **ניסוח**

סכום X של n משתני ברנולי $X_1, X_2, ..., X_n$ בלתי תלויים בעלי פרמטר p מתפלג בינומית עם פרמטרים n ו– p. כלומר,

$$.X = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim \text{Bin}(n, p)$$

דוגמא E5.3 – חלק שני

משפט הפרוק עוזר לנו להבין הופעה של התפלגות בינומית עבור משתנה מקרי X = {מספר בנות במשפחה אקראית בת 3 ילדים}. כדי למנות את מספר הבנות במשפחה, נגדיר שלושה משתני ברנולי בלתי תלויים בעלי פרמטר $p=1/2$

$$X_j=\begin{cases}1, & \text{בת}\\ 0, & \text{בן}\end{cases},\quad j=1,2,3.$$

קל להבין כי מספר בנות X במשפחה אקראית נתון על ידי הסכום $X=X_1+X_2+X_3$. כיוון ש־$X_j\sim\mathrm{Ber}(p)$ ($j=1,2,3$), על פי משפט הפרוק המשתנה X מתפלג בינומית עם פרמטרים $n=3$ ו־$p=1/2$. כלומר, $X\sim\mathrm{Bin}\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

משפט T5.1 — הוכחה

נתבונן בסדרה של n משתני ברנולי בלתי תלוים $X_1,X_2,\dots,X_n$ בעלי פרמטר p: $X_j\sim\mathrm{Ber}(p)$ עבור $j=1,\dots,n$:

$$X_j=\begin{cases}1, & p\quad \text{בהסתברות}\\ 0, & 1-p\quad \text{בהסתברות}\end{cases}$$

מהי ההסתברות למצוא $X=\sum_{j=1}^{n}X_j=k$? (ברור כי הערכים האפשריים של X הם $k=0,1,\dots,n$).

על מנת לחשב את ההסתברות $P\left(\sum_{j=1}^{n}X_j=k\right)$ נתבונן ב־n תאים, התא ה־j שמור לערך של המשתנה X_j אשר 0 או 1. כדי להגיע לסכום $X=\sum_{j=1}^{n}X_j=k$, יש להבטיח כי ב־n תאים ישנם בדיוק k אחדים ו־$(n-k)$ אפסים:

0	0	0	0	...	1	1	1

$n-k$ אפסים k אחדים

על פי עקרון הכפל, הסתברות של מאורע זה היא $p^k(1-p)^{n-k}$. הסתברות זו מתייחסת **לסדרה מסוימת** של k אחדים ו־$(n-k)$ אפסים. כיוון שישנם סדרות אחרות נוספות שמורכבות מ־k אחדים ו־$(n-k)$ אפסים. מסיבה זו יש להכפיל את ההסתברות $p^k(1-p)^{n-k}$ במספר אופציות לסדר k אחדים ו־$(n-k)$ אפסים בשורה:

$$P_n(k,n-k)=\binom{n}{k,n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k.$$

כתוצאה,

$$P\left(\sum_{j=1}^{n}X_j=k\right)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

עבור $k=0,1,\dots,n$. סוף הוכחה.

5.3.3 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ נתונה על ידי הנוסחא $E[X]=np$.

הוכחה.
על פי משפט הפרוק, מותר לפרק את המשתנה $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ לסכום של n משתני ברנולי בלתי תלויים $X_1,X_2,\ldots,X_n$ בעלי פרמטר p: $X_j\sim \mathrm{Ber}(p)$ (כאן $j=1,\ldots,n$). אזי,

$$E[X]=E\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\right]=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{E[X_j]}_{p}=\sum_{j=1}^{n}p=n\cdot p.$$

סוף הוכחה.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ נתונה על ידי הנוסחא $\mathrm{var}[X]=np(1-p)$.

הוכחה.
על פי משפט הפרוק, מותר לפרק את המשתנה $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ לסכום של n משתני ברנולי בלתי תלויים $X_1,X_2,\ldots,X_n$ בעלי פרמטר p: $X_j\sim \mathrm{Ber}(p)$ (כאן $j=1,\ldots,n$). אזי,

$$\mathrm{var}[X]=\mathrm{var}\left[\sum_{j=1}^{n}X_j\right]=\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\mathrm{var}[X_j]}_{p(1-p)}=\sum_{j=1}^{n}p(1-p)=n\cdot p(1-p).$$

סוף הוכחה.

שאלה L5.3
בתהליך ייצור נורות, קיימת הסתברות של 2% לייצור נורה פגומה.

א. מהי ההסתברות שבמשלוח של 50 נורות ימצאו בדיוק 4 נורות פגומות?
ב. מהי ההסתברות שבמשלוח יהיו פחות מ—4 נורות פגומות?

פתרון. ייצור נורה בודדת הוא ניסוי ברנולי בעל הסתברות ל"הצלחה" = {ייצור נורה פגומה} $p=0.02$.
עבור הנורה ה—j ($j=1,\ldots,50$) נגדיר את המשתנה המקרי

$$X_j=\begin{cases}1, & \text{פגומה}\\ 0, & \text{תקינה}\end{cases}$$

אזי, מספר כולל של נורות פגומות במשלוח של $n=50$ נורות הוא $X=\sum_{j=1}^{n}X_j$. אם נניח שאין תלות בין ייצור נורות שונות, מותר להתייחס לסדרה של 50 משתני ברנולי כלסדרה של משתנים בלתי תלויים. על פי **משפט הפירוק**, $X=\sum_{j=1}^{n=50}X_j\sim \mathrm{Bin}(n=50,p=0.02)$. כתוצאה מכך,

א. $P(X=4)=C_{50}^{4}(0.02)^4(1-0.02)^{50-4}\approx 0.0145$.
ב. $P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\approx 0.982$.

שאלה L5.4
מכשיר מכיל 5 יחידות זהות בלתי תלויות ולכל אחת הסתברות 80% להימצא במצב תקין. המכשיר כולו פועל רק כשיש בו לפחות 3 יחידות תקינות. מהי ההסתברות שהמכשיר יפעל ברגע מסוים?

פתרון. בדיקת מצבה של יחידה אחת היא ניסוי ברנולי בעל פרמטר $p = 0.8$. מדובר על סדרה של 5 ניסויי ברנולי. לכן, אם X הוא מספר היחידות התקינות (מתוך $n = 5$) הרי $X \sim \text{Bin}(n = 5, p = 0.8)$ בהתאם **למשפט הפירוק**. כתוצאה, ההסתברות הדרושה היא

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \approx 0.942 .$$

שאלה L5.5
מהי ההסתברות שלפחות שני סטודנטים מכיתה המונה 20 איש נולדו באותו תאריך מסוים נתון?

פתרון. אם נתון תאריך מסוים, בהסתברות $p = \dfrac{1}{365}$ סטודנט שנבחר מקרית נולד באותו תאריך. מספר כולל של סטודנטים X שנולדו באותו תאריך (מתוך 20 שבכיתה) הוא מספר מקרי המפולג בינומית $X \sim \text{Bin}\left(n = 20, p = \dfrac{1}{365}\right)$ כך שההסתברות למצוא בדיוק $0 \leq k \leq 20$ סטודנטים כאלה היא

$$P(X = k) = C_{20}^{k} \frac{(364)^{20-k}}{(365)^{20}}$$

עבור $k = 0, 1, \ldots, 20$. אזי, ההסתברות המבוקשת היא

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1.13 \cdot 10^{-4} .$$

5.4 התפלגות גיאומטרית [Geometric distribution]

5.4.1 סדרת ניסויי ברנולי עד ההצלחה הראשונה

נניח שאנחנו מבצעים סדרה של ניסויי ברנולי (יכולה להיות סדרה אינסופית). בוודאי שלא ידוע לנו מתי נגיע להצלחה הראשונה. נסמן ב— X את מספר הניסויי ברנולי שידרשו כדי להגיע להצלחה בפעם ראשונה. מהי ההסתברות לקבל $X = k$? (כאן, $k = 1,2,\ldots$).

אם ההצלחה הראשונה התרחשה בניסוי ה— k, הניסויים הקודמים הסתיימו בכישלון:

<table>
<tr><td>התא ה— k
ההצלחה ה— k</td><td>כשלון</td><td>...</td><td>כשלון</td><td>כשלון</td><td>כשלון</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">$k-1$ תאים עם $k-1$ כישלונות</td></tr>
</table>

על פי עקרון הכפל, ההסתברות המתאימה היא $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$ עבור $k = 1,2,\ldots$.

הגדרה D5.5
משתנה גיאומטרי $X \sim \text{G}(p)$ בעל פרמטר $0 < p < 1$ הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערכים $k = 1, 2, \ldots$ בהסתברויות

$$P_X(x = k) = P(X = k) = p(1 - p)^{k-1} .$$

5.4.2 פונקצית התפלגות מצטברת עבור משתנה גיאומטרי

טענה. יהיה $X \sim \mathrm{G}(p)$. פונקצית התפלגות מצטברת היא

$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor}, & t\ge 1 \end{cases}$$

הוכחה. יש להשתמש בהגדרה של פונקצית התפלגות מצטברת כדי לחשב אותה עבור נקודות $t=k=1,2,...$:

$$F_X(t=k)=P(X\le k)=p\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1}=p\cdot\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}=1-(1-p)^k.$$

(השתמשנו בטור גיאומטרי סופי). כיוון ש- $X \sim \mathrm{G}(p)$ הוא משתנה מקרי בדיד, מיד מגיעים לנוסחא הדרושה. סוף הוכחה.

הערה R5.2

הטענה מביאה לנוסחא חשובה:

$$P(X>k)=1-P(X\le k)=(1-p)^k$$

עבור כל $k=1,2,...$ חיובי שלם.

5.4.3 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{G}(p)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$E[X]=\frac{1}{p}.$$

הוכחה.

על פי הגדרת התוחלת, יש לחשב

$$E[X]=\sum_x x\cdot P(x)=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}.$$

הגענו לטור מסוג $S(q)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}$ עם $|q|<1$. חישובו מתבצע בעזרת גזירה של טור גיאומטרי:

$$S(q)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}q^k=\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q}=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

הצבת $q=1-p$ מביאה $S(1-p)=\frac{1}{p^2}$ כך שהתוחלת $E[X]=pS(1-p)=\frac{1}{p}$. סוף הוכחה.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{G}(p)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$\mathrm{var}[X]=\frac{1-p}{p^2}.$$

הוכחה.

על פי הגדרה,

$$\mathrm{var}[X]=E[X^2]-\Big(\underbrace{E[X]}_{1/p}\Big)^2=E[X^2]-\frac{1}{p^2}.$$

יש לחשב את התוחלת

$$E\left[X^2\right]=\sum_x x^2 P_X(x)=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}\,.$$

נתבונן בטור

$$T(q)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}$$

עבור $|q|<1$. קל לראות כי

א. $q\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}q^k=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^k$ **ב.** $\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^k=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}$

שילוב הנוסחאות מראה כי

$$T(q)=\frac{d}{dq}\left(q\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)\cdot$$

ביצוע טור גיאומטרי מביא:

$$T(q)=\frac{d}{dq}\left(q\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q}\right)=\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)=\frac{1+q}{(1-q)^3}\cdot$$

כתוצאה,

$$E\left[X^2\right]=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=pT(1-p)=\frac{2-p}{p^2}$$

כך שהשונות היא

$$\operatorname{var}[X]=E\left[X^2\right]-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}\,.$$

סוף הוכחה.

שאלה L5.6

כמה לידות בממוצע יובילו ל"הצלחה" – לידת הבת?

פתרון. יהיה משתנה מקרי X = {מספר לידות עד לידת הבת הראשונה}. הסתברות להצלחה $p=\frac{1}{2}$

כך ש– $X\sim \mathrm{G}(p=1/2)$. ממוצע מספר הלידות עד ה"הצלחה" הראשונה הוא

$$E[X]=\frac{1}{p}=2\,.$$

שאלה L5.7

בתהליך ייצור של פריט מסוים, הסתברות של פריט פגום היא 1%.

א. מהי ההסתברות שבבדיקת איכות של פריטים מוגמרים בזה אחר זה יימצאו 6 תקינים והשביעי פגום?

ב. מהי ההסתברות שביקורת שגרתית בה נבדקים 5 פריטים בזה אחר זה, לא תגלה אף פריט אחד פגום?

פתרון. נתייחס לגילוי של פריט פגום כל"הצלחה". הרי לפנינו סדרה של ניסוי ברנולי בעלי פרמטר $p=0.01$. אם X הוא מספרו של הפריט הפגום הראשון בו אנחנו נתקלים, אזי $X\sim \mathrm{G}(p=0.01)$.

א. הסתברות המבוקשת היא $P(X=7)=p(1-p)^6\approx 0.094$.

ב. הסתברות המבוקשת היא $P(X>5)=(1-0.01)^5\approx 0.95$. (ניתן להגיע לאותה תשובה דרך התפלגות בינומית!)

5.5 התפלגות בינומית שלילית [Negative binomial distribution]

5.5.1 סדרת ניסוי ברנולי עד ההצלחה ה— m

נניח שאנחנו מבצעים סדרה של ניסוי ברנולי. נסמן ב— X את מספר הניסויים עד שנגיע להצלחה ה— m. מהי ההסתברות לקבלת $X=k$? במילים אחרות, מהי ההסתברות שנצטרך לבצע $X=k$ ניסוי ברנולי עד שנגיע להצלחה ה- m ?

ניתן לראות מהציור

התא ה— k ההצלחה ה— m	כשלון	...	כשלון	הצלחה שנייה	כשלון	הצלחה ראשונה	כשלון
	$k-1$ תאים עם $m-1$ הצלחות ו—$(k-m)$ כישלונות						

כי הסתברות של סדרת ההצלחות וכישלונות שבציור היא $p^m \cdot (1-p)^{k-m}$. אבל ישנן סדרות נוספות עם אותו מספר הצלחות וכישלונות המתאימות להגדרה "הצלחה ה— m בניסוי ה— k". מספר כולל של סדרות כאלו הוא

$$P_{k-1}(m-1,k-m)=\binom{k-1}{m-1,k-m}=\frac{(k-1)!}{(m-1)!(k-m)!}=C_{k-1}^{m-1}.$$

אזי, ההסתברות להגיע להצלחה ה— m בניסוי ה— k היא

$$P(X=k)=C_{k-1}^{m-1}p^m(1-p)^{k-m}$$

עבור $k=m,m+1,\ldots$.

הגדרה D5.6

משתנה בינומי שלילי $X \sim \mathrm{NegBin}(m,p)$ בעל פרמטרים $0<p<1$ ו—$m \ge 1$ (שלם חיובי) הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערכים $k=m,\ m+1,\ \ldots$ בהסתברויות

$$P_X(x=k)=P(X=k)=C_{k-1}^{m-1}p^m(1-p)^{k-m}.$$

5.5.2 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{NegBin}(m,p)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$E[X]=\frac{m}{p}.$$

הוכחה תינתן בהרצאה מס' 6.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{NegBin}(m,p)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$\mathrm{var}[X]=\frac{m(1-p)}{p^2}.$$

הוכחה תינתן בהרצאה מס' 6.

שאלה L5.8
מהי ההסתברות שהילד השלישי במשפחה יהיה בן שני?

פתרון. נגדיר את המשתנה X = {מספר הלידות עד ילידת הבן השני}. כיוון ש— $X \sim \mathrm{NegBin}(m=2, p=1/2)$, ההסתברות הדרושה היא

$$P(X=3) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

5.6 התפלגות היפרגיאומטרית [Hypergeometric distribution]

5.6.1 משתנה היפרגיאומטרי

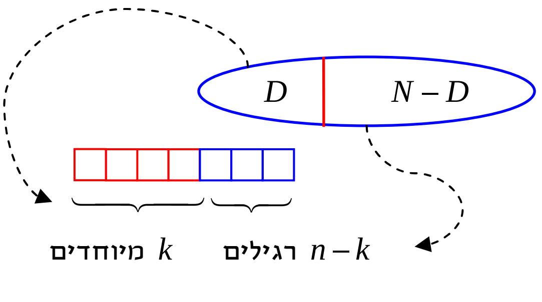
הגדרה D5.7
משתנה היפרגיאומטרי $X \sim \mathrm{Hyp}(N, D, n)$ בעל פרמטרים $N \geq 2$, $1 \leq D < N$ ו— $1 \leq n \leq N$ הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערכים $k = 0, 1, \ldots, n$ בהסתברויות

$$P_X(x=k) = P(X=k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}.$$

5.6.2 מתי התפלגות היפרגיאומטרית מופיעה?

נתבונן באוסף של $N \geq 2$ פרטים (כדורים) בה $1 \leq D < N$ פרטים בעלי תכונה מסוימת (פריטים "מיוחדים", לצורך הדוגמא – כדורים אדומים) ושאר $N-D$ הפרטים הם "רגילים" (למשל, כדורים שחורים). נוציא מהאוסף באופן מקרי מדגם של $1 \leq n < N$ פרטים <u>ללא החזרה</u>. מהי ההסתברות שבין n פריטים שהוצאו ישנם בדיוק $0 \leq k \leq n$ פריטים מיוחדים?

במילים אחרות, אם משתנה מקרי X מוגדר כ"מספר פרטים מיוחדים במדגם של n פריטים", מהי ההסתברות $P(X=k)$ למצוא $X=k$?



כדי לענות על השאלה, נתייחס להוצאת כדורים ללא החזרה מהאוסף כלמילוי של n תאים באמצעות פריטים משני סוגים – מיוחדים ורגילים.

בשלב הראשון, נחשב את ההסתברות ש— k תאים משמאל ממולאים על ידי פריטים מיוחדים בלבד. על פי עקרון הכפל, הסתברות זו (P_L) היא כפל בין ההסתברויות הבאות:

- הסתברות p_1 שהפריט הראשון שהוצא מהאוסף הוא פריט מיוחד. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$p_1 = \frac{D}{N}.$$

- הסתברות p_2 שהפריט השני שהוצא מהאוסף הוא פריט מיוחד. מכיוון שמדובר על הוצאת פריטים **ללא החזרה**,

$$p_2 = \frac{D-1}{N-1}.$$

(בהחלט, לפני הוצאת הפריט השני, האוסף מכיל $N-1$ פריטים, ביניהם $D-1$ פריטים מיוחדים).

- ...

- הסתברות p_k שהפריט ה—k שהוצא מהאוסף הוא פריט מיוחד:

$$p_k = \frac{D-(k-1)}{N-(k-1)}.$$

כתוצאה, ההסתברות P_S ש—k תאים משמאל ממולאים על ידי פריטים מיוחדים היא

$$P_L = \prod_{j=1}^{k} p_j = \frac{D(D-1)...(D-k+1)}{N(N-1)...(N-k+1)}.$$

(קל לראות כי

$$D(D-1)...(D-k+1) = \frac{D(D-1)...(D-k+1)\cdot(D-k)(D-k-1)...1}{(D-k)(D-k-1)...1}$$
$$= \frac{D!}{(D-k)!}$$

כך ש—

$$N(N-1)...(N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}$$

ו—

$$P_L = \prod_{j=1}^{k} p_j = \frac{D!}{(D-k)!}\frac{(N-k)!}{N!} = \frac{D!}{(D-k)!k!}\frac{(N-k)!k!}{N!} = \frac{C_D^k}{C_N^k}.$$

בשלב השני, נחשב את ההסתברות ש—$(n-k)$ תאים מימין ממולאים על ידי פריטים רגילים בלבד. על פי עקרון הכפל, הסתברות זו (P_R) היא כפל בין ההסתברויות הבאות:

- הסתברות p_{k+1} שהפריט ה—$(k+1)$ שהוצא מהאוסף הוא פריט רגיל. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$p_{k+1} = \frac{N-D}{N-k}.$$

(בהחלט, לפני הוצאת הפריט ה—$(k+1)$, האוסף מכיל $N-k$ פריטים, ביניהם $N-D$ פריטים רגילים).

- הסתברות p_{k+2} שהפריט ה—$(k+2)$ שהוצא מהאוסף הוא פריט מיוחד. מכיוון שמדובר על הוצאת פריטים **ללא החזרה**,

$$p_{k+2} = \frac{N-D-1}{N-k-1}.$$

- ...

• הסתברות p_n שהפריט ה—n שהוצא מהאוסף הוא פריט רגיל:

$$p_n = \frac{N-D-(n-k-1)}{N-k-(n-k-1)} = \frac{N-D-(n-k)+1}{N-n+1}.$$

כתוצאה, ההסתברות P_R ש—$(n-k)$ תאים מימין ממולאים על ידי פריטים רגילים היא

$$P_R = \prod_{j=k+1}^{n} p_j = \frac{(N-D)(N-D-1)\ldots(N-D-(n-k)+1)}{(N-k)(N-k-1)\ldots(N-n+1)}.$$

(קל לראות כי

$$\begin{aligned}
&(N-D)(N-D-1)\ldots(N-D-(n-k)+1) \\
&= \frac{(N-D)(N-D-1)\ldots(N-D-(n-k)+1)\cdot(N-D-(n-k))(N-D-(n-k-1))\ldots 1}{(N-D-(n-k))(N-D-(n-k-1))\ldots 1} \\
&= \frac{(N-D)!}{(N-D-(n-k))!}
\end{aligned}$$

ו—

$$\begin{aligned}
&(N-k)(N-k-1)\ldots(N-n+1) \\
&= \frac{(N-k)(N-k-1)\ldots(N-n+1)\cdot(N-n)(N-n-1)\ldots 1}{(N-n)(N-n-1)\ldots 1} \\
&= \frac{(N-k)!}{(N-n)!}
\end{aligned}$$

כך ש—

$$\begin{aligned}
P_R &= \prod_{j=k+1}^{n} p_j = \frac{(N-D)!}{(N-D-(n-k))!}\cdot\frac{(N-n)!}{(N-k)!} \\
&= \frac{(N-D)!(n-k)!}{(N-D-(n-k))!(n-k!)}\cdot\frac{(N-n)!n!N!}{n!N!(N-k)!} \\
&= \frac{(N-D)!}{(N-D-(n-k))!(n-k!)}\cdot\frac{(N-n)!n!}{N!}\cdot\frac{N!(n-k)!}{(N-k)!n!} \\
&= C_{N-D}^{n-k}\cdot\frac{1}{C_N^n}\cdot\frac{N!}{(N-k)!k!}\cdot\frac{(n-k)!k!}{n!} = \frac{C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}\cdot\frac{C_N^k}{C_n^k}
\end{aligned}$$

כסיכום בינוני, מצאנו כי ההסתברות ש—k תאים משמאל ממולאים על ידי פריטים מיוחדים היא

$$P_L = \prod_{j=1}^{k} p_j = \frac{C_D^k}{C_N^k}$$

וההסתברות ש—$(n-k)$ תאים מימין ממולאים על ידי פריטים רגילים היא

$$P_R = \prod_{j=k+1}^{n} p_j = \frac{C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}\cdot\frac{C_N^k}{C_n^k}.$$

אזי, ההסתברות ש—k תאים משמאל ממולאים על ידי פריטים מיוחדים **וגם** ש—$(n-k)$ תאים מימין ממולאים על ידי פריטים רגילים היא

$$.P_L P_R=\prod_{j=1}^{k} p_j \prod_{j=k+1}^{n} p_j=\prod_{j=1}^{n} p_j=\frac{C_D^k}{C_N^k}\cdot\frac{C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}\cdot\frac{C_N^k}{C_n^k}=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}\cdot\frac{1}{C_n^k}$$

האם זו ההסתברות $P(X=k)$ שבין n פריטים שהוצאו ישנם בדיוק $0\le k\le n$ פריטים מיוחדים? התשובה היא לא כי הסתברות $P_L P_R$ מתייחסת **לסדר מסוים** של n פריטים שהוצאו. כדי לקחת בחשבון את כל הסדרים האפשריים, יש להכפיל את התוצאה במספר אופציות לסדר k פריטים מיוחדים ו—$(n-k)$ פריטים רגילים בשורה. מספר זה ניתן על ידי הנוסחא

$$.P_n(k,n-k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$$

זהו **השלב השלישי**. סך הכל,

$$.P(X=k)=P_n(k,n-k)\cdot P_L P_R=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

נוסחא שקיבלנו היא פונקצית הסתברות של משתנה היפרגיאומטרי $X\sim \mathrm{Hyp}(N,D,n)$ בהתאם להגדרה **D5.7**.

הערה R5.3

ניתן לפרש את הנוסחא עבור $P(X=k)$ באופן הבא. המספר C_N^n הוא מספר האופציות להוציא n פריטים מתוך N פריטים שבאוסף (כלומר, גודל של מרחב המדגם). הכפל $C_D^k C_{N-D}^{n-k}$ הוא מספר האופציות להוציא k פריטים מיוחדים מתוך D מיוחדים שבאוסף **וגם** $(n-k)$ פריטים רגילים מתוך $(N-D)$ רגילים שבאוסף. שימוש בגישה קלאסית להסתברות מביא את הנוסחא עבור $.P(X=k)$

שאלה L5.9

כד מכיל 3 כדורים לבנים ו—2 כדורים שחורים. איך מפולגים משתנים מקריים הבאים:

א. X_1 = {מספר הכדורים השחורים במדגם של 3 כדורים שנבחרו מקרית <u>עם</u> החזרה}.

ב. X_2 = {מספר הכדורים השחורים במדגם של 3 כדורים שנבחרו מקרית <u>בלי</u> החזרה}.

ג. X_3 = {מספר הכדורים שנבחרים אחד אחד <u>עם</u> החזרה עד אשר יתקבל הכדור השחור הראשון}.

פתרון.

א. משתנה מקרי X_1 הוא מספר ההצלחות (כאן, הצלחה היא הוצאת כדור שחור) בסדרה של שלושה ניסוי ברנולי בלתי תלויים. כתוצאה, $.X_1\sim \mathrm{Bin}\left(n=3,\, p=\frac{2}{5}\right)$

ב. בהתאם לפיתוח בסעיף **5.6.2**, $.X_2\sim \mathrm{Hyp}(N=5, D=2, n=3)$

ג. משתנה מקרי X_3 הוא מספר ניסוי ברנולי עד ההצלחה הראשונה. כתוצאה, $.X_3\sim \mathrm{G}\left(p=\frac{2}{5}\right)$

5.6.3 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{Hyp}(N,D,n)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$E[X] = n\frac{D}{N}.$$

הוכחה תינתן בהרצאה מס' 6.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{Hyp}(N,D,n)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$\mathrm{var}[X] = n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

הוכחה תינתן בהרצאה מס' 6.

5.7 התפלגות היפרגיאומטרית שלילית

[Negative Hypergeometric distribution]

5.7.1 משתנה היפרגיאומטרי שלילי

הגדרה D5.8

משתנה היפרגיאומטרי שלילי $X_m \sim \mathrm{NegHyp}(m;N,D)$ בעל פרמטרים $1 \le m \le D$, $N \ge 2$, $1 \le D < N$ הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערכים $k = m, m+1, \ldots, N-D+m$ בהסתברויות

$$P_{X_m}(x_m = k) = P(X_m = k) = C_{k-1}^{m-1}\frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}.$$

5.7.2 מתי התפלגות היפרגיאומטרית שלילית מופיעה?

נתבונן באוסף של $N \ge 2$ פרטים (כדורים) בה $1 \le D < N$ פרטים בעלי תכונה מסוימת (פרטים "מיוחדים", לצורך הדוגמא – כדורים אדומים) ושאר $N-D$ הפרטים הם "רגילים" (למשל, כדורים שחורים). אנחנו מוציאים פרטים אחד אחד <u>וללא החזרה</u> עד אשר יתקבל הפריט המיוחד ה— m (כאן, $1 \le m \le D$). מהי ההסתברות להגיע לפריט המיוחד ה— m בהוצאה ה— k?

נגדיר משתנה מקרי X_m = {מספר הוצאות הפריטים עד הוצאת הפריט המיוחד ה— m} ונחשב את פונקצית ההסתברות שלו.

א. הערכים האפשריים של X_m הם $k = m, \ldots, N-D+m$. הערך המינימלי ($k=m$) מתאים למצב בו כל m הפריטים הראשונים שהוצאו הם פריטים מיוחדים. הערך המירבי ($k = N-D+m$) מתאים למצב בו אנחנו מוציאים כל הפריטים הרגילים ($N-D$ במספר) ורק לאחר מכן מוציאים m פריטים מיוחדים.

ב. פונקצית ההסתברות $P(X_m = k)$ היא הסתברות להגיע לפריט המיוחד ה— m בהוצאה ה— k. אפשר להסתכל על המאורע $\{X_m = k\}$ כעל מילוי של k תאים באמצעות פרטי האוסף כך שהתא ה— k יהיה שמור לפריט המיוחד ה— m, כאשר $k-1$ התאים הקודמים תפוסים על ידי $m-1$ פריטים מיוחדים ו— $k-1-(m-1) = k-m$ פריטים רגילים (ראה/י ציור).

התא ה—k פריט מיוחד ה—m	פריט רגיל	...	פריט רגיל	פריט מיוחד שני	פריט רגיל	פריט מיוחד ראשון	פריט רגיל
	$k-1$ תאים עם $m-1$ פריטים מיוחדים ו—$(k-m)$ פריטים רגילים						

נתייחס למילוי של k תאים כמו לניסוי דו—שלבי. **בשלב הראשון**, אנחנו ממלאים $k-1$ התאים הראשונים באמצעות $m-1$ פריטים מיוחדים ו—$(k-m)$ פריטים רגילים. הסתברות לביצוע השלב הראשון ניתנת על ידי התפלגות היפרגיאומטרית:

$$.\, P_1 = \frac{C_D^{m-1} C_{N-D}^{k-m}}{C_N^{k-1}}$$

בשלב השני, אנחנו ממלאים את התא האחרון – ה—k באמצעות הפריט המיוחד. גישה קלאסית להסתברות מביאה את הסתברות השלב השני:

$$P_2 = \frac{D-(m-1)}{N-(k-1)}$$

על פי עיקרון הכפל,

$$.\, P(X_m = k) = P_1 P_2 = \frac{C_D^{m-1} C_{N-D}^{k-m}}{C_N^{k-1}} \frac{D-(m-1)}{N-(k-1)}$$

ניתן לפשט את התשובה עד הנוסחה הבאה:

$$.\, P(X_m = k) = C_{k-1}^{m-1} \frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}$$

כאן, $k = m, \ldots, N-D+m$.

נוסחה שקיבלנו היא פונקצית הסתברות של משתנה היפרגיאומטרי שלילי $X_m \sim \mathrm{NegHyp}(m; N, D)$ בהתאם להגדרה **D5.8**.

הערה R5.4
ניתן לראות כי פונקציות הסתברות עבור משתנה מקרי בינומי שלילי והיפרגיאומטרי שלילי מכילות אותו מקדם C_{k-1}^{m-1}.

5.7.3 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X_m \sim \mathrm{NegHyp}(m; N, D)$ נתונה על ידי הנוסחה

$$.\, E[X_m] = m \frac{N+1}{D+1}$$

הוכחה תינתן בהרצאה מס' 6.

טענה. שונות של משתנה מקרי $X_m \sim \mathrm{NegHyp}(m; N, D)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$\mathrm{var}[X_m] = m\frac{N+1}{D+1}\frac{N-D}{D+2}\left(1-\frac{m}{D+1}\right).$$

הוכחה תינתן בהרצאה מס' 6.

5.8 התפלגות פואסון [Poisson distribution]

5.8.1 פונקצית הסתברות

הגדרה D5.9

משתנה פואסון $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ בעל פרמטר $\lambda > 0$ הוא משתנה בדיד אשר מקבל את הערכים $k = 0, 1, \ldots$ בהסתברויות

$$P_X(x=k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

הערה R5.5

התפלגות פואסון מתאר מספר התרחשויות **בזרם אירועים פואסוני** בפרק זמן נתון מסוים. האירועים בזרם מתרחשים ללא תלות ובאחידות בזמן. דוגמאות קלאסיות של תופעות אקראיות המתאורות על ידי זרם אירועים פואסוני הן:

א. מספר פניות למוקד טלפוני בפרק זמן מסוים

ב. מספר התפרקויות הגרעינים של חומר רדיואקטיבי בפרק זמן נתון

5.8.2 תוחלת ושונות

טענה. תוחלת של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$E[X] = \lambda.$$

הוכחה. הגדרת תוחלת מביאה:

$$E[X] = \sum_x x\cdot P(x) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

באמצעות החלפת אינדקס הסכום $j = k-1$ מגיעים ל—

$$E[X] = \lambda e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} = \lambda.$$

סוף הוכחה.

הערה R5.6

מהחישוב נובעת משמעות הפרמטר λ בהתפלגות פואסון $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$. הפרמטר λ הוא "**ממוצע התרחשויות** בפרק זמן נתון".

טענה. שונות של משתנה מקרי $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ נתונה על ידי הנוסחא

$$\mathrm{var}[X] = \lambda.$$

הוכחה. על פי הגדרת שונות,

$$\operatorname{var}[X]=E\left[X^2\right]-\Big(\underbrace{E[X]}_{\lambda}\Big)^2=E\left[X^2\right]-\lambda^2 .$$

יש לחשב את התוחלת

$$E\left[X^2\right]=\sum_x x^2\cdot P(x)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!} .$$

נתבונן בטור

$$S(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

קל לראות כי

א. $\lambda\dfrac{d}{d\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ **ב.** $\lambda\dfrac{d}{d\lambda}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

שילוב הנוסחאות מראה כי

$$S(\lambda)=\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}}\right)=\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda}\right)=\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}\right)=\lambda(\lambda+1)e^{\lambda} .$$

כתוצאה,

$$E\left[X^2\right]=e^{-\lambda}S(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$$

כך ש—

$$\operatorname{var}[X]=E\left[X^2\right]-\lambda^2=\lambda .$$

סוף הוכחה.

שאלה L5.10

אם ידוע שמספר פניות בדקה למודיעין של שירותי טלפון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 5 פניות **בדקה אחת**, מהי ההסתברות

א. שבין השעה 10:00 ל—10:01 לא תתקבל אף פנייה?
ב. שבדקה הזאת יתקבלו לכל היותר 3 פניות?
ג. שבמשך **2 דקות** לא תכנס אף שיחה?
ד. שב**שעה** הראשונה יכנסו 333 שיחות?

פתרון.

יהיה משתנה מקרי X_1 = {מספר פניות **בדקה אחת**}. על פי נתוני השאלה, $X_1\sim \mathrm{P}(\lambda=5)$.

א. $P(X_1=0)=\dfrac{5^0}{0!}e^{-5}\approx 0.0067$.

ב.

$$P(X_1\le 3)=P(X_1=0)+P(X_1=1)+P(X_1=2)+P(X_1=3)$$
$$=e^{-5}+\frac{5^1}{1!}e^{-5}+\frac{5^2}{2!}e^{-5}+\frac{5^3}{3!}e^{-5}\approx 0.265$$

ג. יהיה משתנה מקרי X_2 = {מספר פניות במשך **שתי דקות**}. על פי נתוני השאלה, $X_2\sim \mathrm{P}(\lambda=10)$.

$$P(X_2=0)=\frac{10^0}{0!}e^{-10}\approx 0.000045$$

ד. יהיה משתנה מקרי X_3 = {מספר פניות במשך **שעה אחת**}. על פי נתוני השאלה, $X_3 \sim \mathrm{P}(\lambda=300)$.

$$P(X_3=4)=\frac{300^{333}}{333!}e^{-300}\approx 0.0038$$

5.10 נוסחאות הסתברותיות מקורבות

5.10.1 נוסחת סטירלינג [Stirling formula]

טענה (נוסחת סטירלינג). עבור n חיובי גדול מאוד, $n>>1$, מתקיים:

$$\Gamma(n+1)=\sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left(1+O(n^{-1})\right).$$

כל הקירובים בהמשך מתבססים על נוסחא זו.

5.10.2 קירוב בינומי להתפלגות היפרגיאומטרית

טענה. יהיה X משתנה מקרי היפרגיאומטרי $X\sim \mathrm{Hyp}(N,D,n)$ המתואר על ידי פונקציית הסתברויות (מדויקת)

$$P_X(x=k)=P(X=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}.$$

עבור כל n סופי ופרמטרים D ו–N גדולים מאוד ($D>>1$ ו–$N>>1$) כאלה ש–$p=\frac{D}{N}$ מקבל ערך קבוע, מתקיימת נוסחא מקורבת:

$$P_X(x=k)\approx C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

כאן, $k\le n<<D<N$.

הוכחה. באמצעות נוסחת סטירלינג, ניתן לוודא כי

- עבור $k<<D$ מתקיים: $C_D^k=\frac{D!}{k!(D-k)!}\approx\frac{D^k}{k!}$
- עבור $n<<N$ מתקיים: $C_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!}\approx\frac{N^n}{n!}$
- עבור $k\le n<<D<N$ ו–$\frac{D}{N}=p$ קבוע מתקיים: $C_{N-D}^{n-k}\approx\frac{(N-D)^{n-k}}{(n-k)!}$

שילוב של שלוש נוסחאות מקורבות אלו מביא:

$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^k\left(\frac{D}{N}\right)^k\left(1-\frac{D}{N}\right)^{n-k}.$$

כתוצאה,

$$.P_X(x=k)\approx C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

סוף הוכחה.

הערה R5.7

משמעות הקירוב ברורה לחלוטין: עבור D ו- N גדולים מאוד, הוצאה ללא החזרה של מספר סופי של פריטים מהאוסף כמאת לא משפיעה על פרופורצית הפריטים המיוחדים באוסף. כתוצאה, אין הבדל משמעותי בין הוצאה ללא ועם החזרה. במילים אחרות, בתנאי הטענה מתקיים:

$$.\mathrm{Hyp}(N,D,n)\approx \mathrm{Bin}\left(n,p=\frac{D}{N}\right)$$

5.10.3 קירוב בינומי שלילי להתפלגות היפרגיאומטרית שלילית

טענה. יהיה X_m משתנה מקרי היפרגיאומטרי שלילי, $X_m\sim \mathrm{NegHyp}(m;N,D)$ בעל פונקצית הסתברות

$$.P_{X_m}(x_m=k)=P(X_m=k)=C_{k-1}^{m-1}\frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}$$

עבור כל m סופי ופרמטרים D ו- N גדולים מאוד ($D>>1$ ו- $N>>1$) כאלה ש- $p=\frac{D}{N}$ מקבל ערך קבוע, מתקיימת נוסחא מקורבת:

$$.P_X(x=k)\approx C_{k-1}^{m-1}p^m(1-p)^{k-m}$$

כאן, $m\le k<<D<N$.

הוכחה: באמצעות נוסחת סטירלינג.

הערה R5.8

משמעות הקירוב ברורה גם כן: עבור D ו- N גדולים מאוד, הוצאה ללא החזרה של מספר סופי של פריטים מהאוסף כמאת לא משפיעה על פרופורצית הפריטים המיוחדים באוסף. כתוצאה, אין הבדל משמעותי בין הוצאה ללא ועם החזרה. במילים אחרות, בתנאי הטענה מתקיים:

$$.\mathrm{NegHyp}(m;N,D)\approx \mathrm{NegBin}\left(m,p=\frac{D}{N}\right)$$

5.10.4 קירוב פואסון להתפלגות בינומית

טענה. יהיה X משתנה מקרי בינומי, $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ בעל פונקצית הסתברות

$$.P_X(x=k)=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

עבור הפרמטר n גדול מאוד ($n>>1$) והפרמטר p קטן מאוד ($p<<1$) כאלה שהכפל $\lambda=np$ מקבל ערך קבוע, מתקיימת נוסחא מקורבת:

$$.P_X(x=k)\approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

כאן, $k<<n$.

הוכחה.

- באמצעות נוסחת סטירלינג, ניתן לוודא כי עבור $k << n$ מתקיים:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \approx \frac{n^k}{k!}.$$

- כמו כן, עבור פרמטר n גדול מאוד ($n >> 1$) ופרמטר p קטן מאוד ($p << 1$) כאלה שהכפל $\lambda = np$ מקבל ערך קבוע, מתקיים:

$$(1-p)^{n-k} = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \approx e^{-\lambda}.$$

שילוב של שתי נוסחאות מקורבות אלו מביא:

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

כתוצאה,

$$P_X(x=k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

סוף הוכחה.

הערה R5.9

במילים אחרות, בתנאי הטענה מתקיים:

$$\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathrm{P}(\lambda = np).$$

שאלה L5.11

בצע/י השוואה כמותית של שתי נוסחאות – המדויקת והמקורבת – של קירוב פואסון להתפלגות בינומית עבור $k=3$, $n=100$ ו— $p=0.02$.

פתרון.

נוסחא מדויקת מביאה

$$P_{\text{exact}} = P(X=3) = C_{100}^3 (0.02)^3 (0.98)^{97} \approx 0.182.$$

בנוסחא מקורבת פרמטר $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0.02 = 2$ כך ש—

$$P_{\text{approx}} = P(X=3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.180.$$

אפשר לכמות דיוק הקירוב (באחוזים) על ידי הפרמטר

$$\alpha = \left| \frac{P_{\text{exact}} - P_{\text{approx}}}{P_{\text{exact}}} \right| = \left| \frac{0.182 - 0.180}{0.182} \right| \approx 0.011 = 1.1\%.$$