PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה מאת יוג'ין קנציפר

הרצאה 3

קומבינטוריקה

• עצרת של מספר ופונקציית גאמא • עקרון הכפל • סידורים ובחירות • תמורות • חליפות • צירופים •
• נוסחת ניוטון • משפט מולטינומי •

קומבינטוריקה עוסקת בסוגים שונים של סידורים ובחירות. בהרבה מקרים התוצאה עבור מספר סידורים או בחירות מכילה עצרת של מספר.

3.1 עצרת של מספר ופונקציית גאמא

הגדרה D3.1

עצרת של מספר [factorial] מוגדרת עבור מספרים שלמים חיוביים $n=1,2,3,...$, מסומנת ב- $n!$ ונתונה על ידי הנוסחא

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n = \prod_{j=1}^{n} j$$

פונקציית עצרת היא מקרה פרטי של פונקציית גאמא [Gamma] המוגדרת על ידי האינטגרל:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} dt\ t^{\alpha} e^{-t}.$$

כאן, α הוא מספר ממשי שנמצא בתחום $\alpha > -1$. עבור α שלמים (כולל אפס) $\alpha = n \ge 0$ מתקיים:

$$n! = \Gamma(n+1).$$

כתוצאה,

$$0! = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} dt\ e^{-t} = 1.$$

שאלה L3.1

הוכח/הוכיחי את הנוסחא $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ עבור כל $\alpha \ge 0$.

פתרון.

נתחיל מהגדרה $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} dt\ t^{\alpha} e^{-t}$ ונבצע את האינטגרציה בחלקים פעם אחת. נקבל:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} dt\ \ t^{\alpha} e^{-t} = -\int_0^{+\infty} t^{\alpha} de^{-t} = -\left(\underbrace{t^{\alpha} e^{-t}\Big|_0^{+\infty}}_{0} - \alpha \int_0^{+\infty} dt\ t^{\alpha-1} e^{-t} \right) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

סוף הוכחה.

שאלה L3.2

הוכח/הוכיחי כי $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

פתרון.

על פי ההגדרה,

$$I=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\int_0^{+\infty}dt\ \ t^{\alpha}e^{-t}\Big|_{\alpha=-\frac{1}{2}}=\int_0^{+\infty}dt\ \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

בואו נבצע החלפת משתנה האינטגרציה $t=x^2$:

$$I=\int_0^{+\infty}dt\ \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}=2\int_0^{+\infty}dx\ e^{-x^2}$$

ונחשב I^2 במקום I:

$$I^2=4\left(\int_0^{+\infty}dx\ e^{-x^2}\right)^2=4\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}dy\ e^{-(x^2+y^2)}$$

בקואורדינטות פולריות $x=\rho\cos\theta$ ו— $x=\rho\sin\theta$ כך ש— $dxdy=\rho d\rho d\theta$. נקבל:

$$I^2=4\underbrace{\int_0^{\pi/2}d\theta}_{\pi/2}\int_0^{+\infty}d\rho\ \rho e^{-\rho^2}=2\pi\underbrace{\int_0^{+\infty}d\rho\ \rho e^{-\rho^2}}_{1/2}=\pi.$$

כתוצאה,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{I^2}=\sqrt{\pi}.$$

סוף הוכחה.

3.2 עקרון הכפל

בניסוח הראשון, עקרון הכפל מאפשר חישוב **מספר התוצאות** האפשריות בניסוי רב שלבי:

מספר התוצאות האפשריות בניסוי רב שלבי ניתן על ידי מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד משלבי הניסוי. כלומר, אם ניסוי מתבצע ב— k שלבים בזה אחר זה כאשר:

בשלב הראשון ישנן n_1 תוצאות אפשריות,

בשלב השני ישנן n_2 תוצאות אפשריות,

...,

בשלב ה— k האחרון ישנן n_k תוצאות אפשריות,

אזי מספר התוצאות השונות בניסוי כולו הוא

$$N=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k=\prod_{j=1}^{k}n_j.$$

.

בניסוח השני (הידוע תחת השם **כלל שרשרת**), עקרון הכפל מאפשר חישוב **ההסתברות** של ניסוי רב שלבי:

עבור המאורע $B=\bigcap_{j=1}^{n}A_j$ מתקיים:

$$.P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

במילים אחרות,

$$.P\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)=P(A_1)\prod_{j=2}^{n}P\left(A_j/\bigcap_{k=1}^{j-1}A_k\right)$$

הערה. משמעות של כלל שרשרת פשוטה; קל לקלוט אותה עבור ניסוי דו שלבי. במקרה זה, $B=A_1\bigcap A_2$ כך ש— $P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)$. הנוסחא אומרת כי הסתברות של מאורע B שווה לכפל בין שתי הסתברויות: בין הסתברות ההתרחשות $P(A_1)$ של השלב הראשון להסתברות ההתרחשות $P(A_2/A_1)$ של השלב השני בהינתן שהשלב הראשון אכן התרחש!

3.3 סידורים

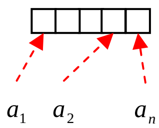
3.3.1 תמורות: סידורים של איברים שונים בשורה

הגדרה D3.2

מספר התמורות [permutations] הוא מספר האפשרויות לסדר n איברים <u>שונים</u> בשורה. המסומן ב— P_n, הוא ניתן על ידי הנוסחא

$$.P_n=n!$$

הוכחה. נתבונן באוסף של n איברים שונים $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ בשורה. מספר אפשרויות (אופציות) לסדר אותם בשורה הוא מספר האופציות למקם את האיברים $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ בתוך n תאים שבציור:



מיקום של n איברים הוא ניסוי בעל n שלבים. בשלב הראשון יש למקם את האיבר הראשון a_1. אפשר לעשות זאת ב— n דרכים. בשלב השני יש למקם את האיבר השני a_2. מכיוון שאחד מהמקומות כבר תפוס על ידי האיבר a_1, קיימות רק $n-1$ אופציות לעשות זאת. כך ממשיכים עד שנגיע למיקום האיבר האחרון a_n שעבורו קיימת אופציה אחת בלבד. אזי, על פי עקרון הכפל, מספר הסידורים הכולל הוא $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$. במילים אחרות, $P_n=n!$.

דוגמא E3.1

מספר תמורות של שלושה איברים שונים $\{a,b,c\}$ בשורה הוא $P_3=3!=6$. הסידורים האפשריים הם $\{a,b,c\}$, $\{a,c,b\}$, $\{b,a,c\}$, $\{b,c,a\}$, $\{c,a,b\}$, $\{c,b,a\}$.

שאלה L3.3

בכמה דרכים אפשר לסדר 3 ספרים שונים על המדף?

פתרון. מדובר על מספר תמורות של שלושה איברים שונים בשורה, $P_3=3!=6$.

שאלה L3.4
נתונות הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6. כמה מספרים בעלי שש ספרות ניתן לרשום בעזרתן במקרים הבאים?

א. ללא הגבלות.
ב. שהספרה 3 ראשונה משמאל.
ג. שהספרה 3 איננה ראשונה משמאל.
ד. שהספרות 3 ו-4 נמצאות בקצוות.
ה. ש-3 הספרות הראשונות משמאל הן אי זוגיות ו-3 הספרות מימין הן זוגיות.

חובה להשתמש בכל הספרות!

פתרון. נוח לחשוב על הרכבת המספר כעל מילוי שישה תאים על ידי הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

א. אם אין הגבלות להרכבה, מדובר על מספר תמורות של שישה איברים <u>שונים</u> בשורה. אזי התשובה היא $P_6 = 6! = 720$.

ב. אם 3 היא ספרה ראשונה משמאל, חייבים למלא את החמישה התאים הנשארים על ידי הספרות 1, 2, 4, 5, 6.

$$\boxed{3}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

ניתן לעשות זאת ב— $P_5 = 5! = 120$ אופנים.

ג. **דרך ראשונה**: אם הספרה 3 איננה ראשונה משמאל, אפשר לראות כי התשובה ניתנת על ידי ההפרש בין א. ו-ב.: $P_6 - P_5 = 6! - 5! = 600$.

דרך שנייה: אם הספרה 3 לא יכולה להופיע כראשונה משמאל, ישנן חמש אופציות למלא את התא השמאלי; עבור התא הבא קיימות חמש אופציות (נובעות מהספרות 1, 2, 4, 5, 6). עבור התא השלישי משמאל נשארות ארבע אופציות וכד'. עקרון הכפל מביא את התשובה: $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 5! = 600$.

ד. אם הספרות 3 ו—4 נמצאות בקצוות, ישנן שתי אופציות:

$$\boxed{3}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{4} \qquad\qquad \boxed{4}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{3}$$

ארבעה מקומות פנויים ממלאים ב— $P_{6-2} = P_4 = 4! = 24$ דרכים שונות באמצעות הספרות 1, 2, 5, 6 כך שהתשובה הסופית היא $2\cdot P_4 = 2\cdot 24 = 48$.

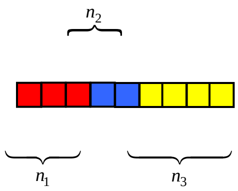
ה. הרכבת מספר בסעיף זה היא ניסוי דו שלבי. בשלב הראשון ממלאים שלושה תאים משמאל באמצעות הספרות 1, 3, 5. עבור זה קיימות $P_3 = 3! = 6$ אופציות. בשלב השני ממלאים שלושה תאים מימין באמצעות הספרות 2, 4, 6. עבור זה קיימות $P_3 = 3! = 6$ אופציות גם כן. עקרון הכפל מביא את התשובה: $P_3 \cdot P_3 = 36$.

3.3.2 תמורות: סידורים בשורה כאשר ישנם איברים זהים

טענה. מספר האפשרויות לסדר n איברים בשורה שבתוכם ישנם n_1 איברים זהים מסוג ראשון, n_2 איברים זהים מסוג שני, ..., n_k איברים זהים מסוג ה— k, הוא

$$P_n(n_1,\dots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}=\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}.$$

כאן $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.



הערה R3.1
המכנה $n_1!n_2!\dots n_k!$ מקטין מספר התמורות $n!$ בגלל נוכחות של k תת קבוצות של איברים זהים: אין צורך למנות תמורות של איברים זהים תוך כל תת קבוצה.

הערה R3.2
המקרה של "כל האיברים שונים" הוא מקרה פרטי של הנוסחא הנ"ל עבור הפרמטרים $n_1=n_2=\dots=n_n=1$:

$$P_n(1,\dots,1)=\frac{n!}{1!\cdot 1!\dots 1!}=P_n=n!$$

דוגמא E3.2
באוסף של חמישה ($n=5$) איברים $\{a,a,b,b,b\}$ ישנן שתי תת קבוצות של איברים זהים ($k=2$) שבתוכם תת קבוצה עם $n_1=2$ איברים מסוג $\{a\}$ ו—$n_2=3$ איברים מסוג $\{b\}$. אזי, מספר תמורות הוא $P_n(n_1,n_2)=P_5(2,3)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$. האופציות הכלולות במספר זה הן

$$\begin{array}{ccccc}\{a,a,b,b,b\} & \{b,b,b,a,a\} & \{a,b,b,b,a\} & \{a,b,b,a,b\} & \{a,b,a,b,b\}\\ \{b,b,a,a,b\} & \{b,a,a,b,b\} & \{b,a,b,b,a\} & \{b,a,b,a,b\} & \{b,b,a,b,a\}\end{array}$$

שאלה L3.5
על המדף תשעה ספרים מהם ארבעה ספרי מתמטיקה זהים, שלושה ספרי פיסיקה זהים ושני ספרי כימיה זהים. מצא/י בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים במקרים הבאים:

א. ללא הגבלה.
ב. כל הספרים מאותו מקצוע סמוכים זה לזה.
ג. ענה על סעיף א' בתנאי ששלושה ספרי פיסיקה שונים זה מזה.

פתרון. משתמשים בנוסחא עבור תמורות בסעיף 3.3.2.

א. כאשר אין הגבלות, מקבלים $P_9(4,3,2)=\dfrac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}=1260$.

ב. אם כל הספרים מאותו מקצוע סמוכים זה לזה, המצב הוא זה של שלושה איברים שונים בשורה, כך שהתשובה היא $3!=6$.

ג. אם מתייחסים לספרי פיסיקה כלספרים שונים זה מזה, מספר התמורות הוא
$$P_9(4,1,1,1,2)=\frac{9!}{4!\cdot 2!}=7560$$

3.4 בחירות

אנחנו נתבונן בארבעה סוגים של בחירות: עם ובלי החזרות, עם ובלי חשיבות לסדר. כל הנוסחאות קשורות לנושא יופיעו בטבלה בסוף הסעיף.

3.4.1 חליפות: בחירה בלי החזרה ועם חשיבות לסדר

הגדרה D3.3

מספר חליפות [variations] הוא מספר האפשרויות לבחור k איברים מאוסף המכיל n איברים <u>שונים</u> כאשר אין לבחור אותו איבר יותר מפעם אחת (בחירה בלי החזרה) אך ישנה חשיבות לסדר הבחירה.

דוגמא E3.3

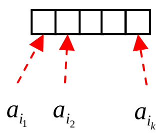
מספר האפשרויות לבחור שני איברים $(k=2)$ מאוסף $\{a,b,c\}$ המכיל שלושה איברים $(n=3)$ כאשר מדובר על <u>בחירה ללא חזרה עם חשיבות לסדר</u> שווה ל—6. האופציות הקיימות הן

$$\{a,b\},\ \{b,a\},\ \{a,c\},\ \{c,a\},\ \{b,c\},\ \{c,b\}.$$

מכיוון שהבחירה היא ללא חזרה, האופציות $\{a,a\}$, $\{b,b\}$, $\{c,c\}$ לא מופיעות ברשימה.

טענה. מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים **שונים** כאשר הבחירה היא **ללא החזרה ועם חשיבות לסדר** (מספר חליפות) הוא
$$P_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

הוכחה. נוח לחשוב על בחירה ללא חזרה ועם חשיבות לסדר של k איברים מתוך n איברים שונים כעל מילוי של k תאים על ידי k איברים a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}. את התא הראשון מותר למלא ב—n דרכים שונות, את התא השני - ב—$(n-1)$ דרכים, את התא השלישי - ב—$(n-2)$ דרכים, ..., את התא ה—k (האחרון) - ב—$(n-k+1)$ דרכים.



על עקרון הכפל, מספר האופציות למלא את כל k התאים הוא
$$P_n^k=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

סוף הוכחה.

הערה R3.3
עקרון הכפל בניסוח הראשון (אשר מתייחס לחישוב **מספר האופציות** בניסוי רב שלבי) לוקח בחשבון כל הסדרים האפשריים. אנחנו נראה בהמשך כי עקרון הכפל בניסוח השני (אשר מטפל בחישוב **הסתברות** בניסוי רב שלבי) לא מתייחס לסדרים שונים כלל.

הערה R3.4

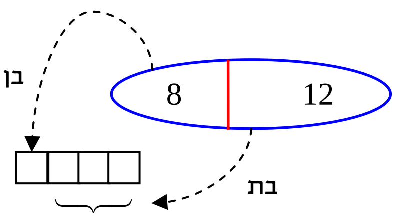
בדוגמא **E3.3**, הפרמטרים $k=2$ ו־$n=3$ כך שמספר אפשרויות הבחירה הוא $P_3^2=\dfrac{3!}{(3-2)!}=6$.

שאלה L3.6
מכיתה בה שמונה בנים ושתים עשרה בנות בוחרים ועדה בת ארבעה תלמידים. כל התפקידים בוועדה שונים זה מזה ותלמיד כלשהו לא יכול להיבחר ליותר מתפקיד אחד.

א. בכמה אופנים ניתן לבחור את הוועדה?
ב. בכמה אופנים ניתן לבחור את הוועדה אם לתפקיד מסוים יש לבחור אחד מהבנים ולשלושת התפקידים האחרים יש לבחור רק בנות?

פתרון. "תלמיד כלשהו לא יכול להיבחר ליותר מתפקיד אחד" – פרוש הדבר: <u>בחירה ללא החזרה</u>. "כל התפקידים בוועדה שונים זה מזה" – פרוש הדבר: <u>בחירה עם חשיבות לסדר</u>. אזי נשתמש בחליפות P_n^k.

א. מספר אופנים $116280=20\cdot 19\cdot 18\cdot 17=\dfrac{20!}{16!}=P_{20}^4$.
ב. מדובר על בחירת הוועדה המכילה בן אחד ושלוש בנות:

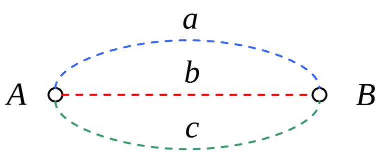


דרך ראשונה. בחירת הוועדה הוא "ניסוי" דו שלבי. בשלב הראשון נבחר בן אחד מתוך 8 בנים בכיתה. אפשר לעשות זאת ב־P_8^1 אופנים. בשלב השני, בוחרים 3 בנות מתוך 12 בנות בכיתה. מספר אופציות אפשריות בשלב זה הוא P_{12}^3. על פי עקרון הכפל, מספר אפשרויות לבחור את הוועדה כולה שווה ל־$P_8^1\cdot P_{12}^3=8\cdot 12\cdot 11\cdot 10=10560$.

דרך שנייה. אפשר להתייחס לבחירת הוועדה כלמילוי ארבעה תאים. את התא הראשון אפשר למלא על ידי בן ב־8 אופנים. את התא השני אפשר למלא על ידי אחת הבנות ב־12 אופנים. אזי למילוי התא השלישי קיימות 11 אופציות, ולתא האחרון נשארו רק 10 אופציות. עקרון הכפל מביא את התשובה $8\cdot 12\cdot 11\cdot 10=10560$.

שאלה L3.7
ישנם 3 מסלולים שונים המקשרים עיר A לעיר B. בכמה אופנים ניתן לעבור מעיר אחת מסויימת לעיר שנייה וחזרה אם לא חוזרים באותה דרך?

פתרון. "לא חוזרים באותה דרך" – פרוש הדבר: <u>בחירה ללא החזרה</u>. מניסוח השאלה עולה כי מדובר על <u>בחירה עם חשיבות לסדר</u>: המסלולים $\{a,b\}$ ו- $\{b,a\}$ הם מסלולים שונים!



מניית המסלולים הלוך ושוב זו בחירה של $k=2$ איברים מתוך $n=3$ איברים. אזי התשובה היא $P_3^2=\frac{3!}{1!}=6$.

שאלה L3.8

פתקים עם שמות של 7 ימי השבוע מונחים בכובע. 3 פתקים נלקחו משם כדי לקבוע 3 ימים בהם יתקיימו 3 הרצאות שונות. מה ההסתברות שההרצאות לא יחולו בסוף שבוע (יום שישי ושבת)? לא תתקיים יותר מהרצאה אחת ביום אחד. סדר בו יתקיימו ההרצאות חשוב.

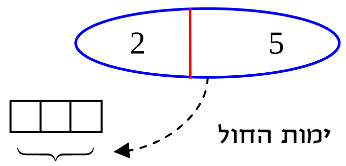
פתרון. "3 הרצאות שונות" – פרוש הדבר: <u>בחירה ללא החזרה</u>. "סדר בו יתקיימו הרצאות חשוב" – פרוש הדבר: <u>בחירה מסודרת</u>.

כדי לחשב את ההסתברות הדרושה, אנחנו חייבים לחשב שני מספרים – גודל מרחב המדגם ומספר האופציות עבור בחירה המובילה לתוצאה עליה שואלים את השאלה.

דרך ראשונה.

א. גודל מרחב המדגם מתאים לבחירה של 3 איברים מתוך 7. אזי, $P_7^3=\frac{7!}{4!}=210$.

ב. אם הרצאות לא יתקיימו בסוף שבוע, כל שלושת הפתקים הגיעו מהחלק של 5 ימות החול כמצויר למטה:



זה מביא את מספר האופציות $P_5^3=\frac{5!}{2!}=60$. לכן ההסתברות הדרושה היא

$$\frac{P_5^3}{P_7^3}=\frac{60}{210}=\frac{2}{7}.$$

דרך שנייה. אפשר לחשב את ההסתברות הנשאלת באמצעות עקרון הכפל בניסוח השני (כלל שרשרת):

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{7}.$$

3.4.2 חליפות: בחירה עם החזרה ועם חשיבות לסדר

בבחירה <u>עם החזרה</u> ניתן לבחור באותו איבר יותר מפעם אחת.

דוגמא E3.4

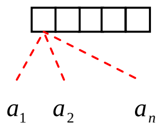
מספר האפשרויות לבחור 2 איברים $(k=2)$ מאוסף של שלושה איברים $(n=3)$ $\{a,b,c\}$ כאשר מדובר על <u>בחירה עם החזרה ועם חשיבות לסדר</u> שווה ל-9. האופציות הקיימות הן

$$\{a,a\},\ \{a,b\},\ \{b,a\},\ \{b,b\},\ \{a,c\},\ \{c,a\},\ \{c,c\},\ \{b,c\},\ \{c,b\}.$$

טענה. מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים **שונים** כאשר הבחירה היא **עם החזרה ועם חשיבות לסדר** הוא

$$n^k.$$

הוכחה. נתבונן באוסף של n איברים שונים $\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$. נתייחס לסידורם כלמילוי של k תאים



מילוי של k תאים הוא ניסוי בעל k שלבים. בכל שלב מותר למלא את התא הרלבנטי ב—n אופנים מכיוון שהבחירה היא בחירה עם החזרה. אזי, על פי עקרון הכפל, מספר כולל של אפשרויות שווה ל-

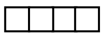
$$\underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{k}=n^k$$

שאלה L3.9

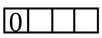
כמה **מספרים** בני 4 ספרות ניתן לרשום באמצעות הספרות 5, 4, 3, 2, 1, 0 ? כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת.

פתרון.

דרך ראשונה. "כל ספרה יכולה להופיע יותר מפעם אחת" – פרוש הדבר: בחירה עם החזרה. מובן שסדר הספרות במספר הוא כן חשוב. אזי, אפשר לבחור 4 ספרות מתוך 6 ב—6^4 אופנים.



הנקודה החשובה – **מספר** לא יכול להתחיל מהספרה 0. זה אומר שצריך להוריד מ—6^4 את מספר האופציות להרכיב "**קוד**" בן 4 ספרות עם ספרה 0 ראשונה משמאל.



מספר אופציות כאלו הוא 6^3. אזי, התשובה היא $6^4-6^3=1080$.

דרך שנייה. מכיוון ש—0 לא יכול להופיע במקום הראשון, קיימות 5 אופציות למלא את התא השמאלי. ל—3 תאים מימין ישנן 6 אופציות עבור כל אחד מתאים אלה. אזי, לפי עקרון הכפל זה מביא את התשובה הבאה: $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6=1080$.

שאלה L3.10

ישנם 3 מסלולים שונים המקשרים עיר A לעיר B. בכמה אופנים ניתן לעבור מעיר אחת מסויימת לעיר שנייה וחזרה אם אפשר לחזור באותה דרך?

פתרון. "אפשר לחזור באותה דרך" – פרוש הדבר: בחירה עם החזרה. משאלה גם עולה כי מדובר על בחירה עם חשיבות לסדר. מניית המסלולים הלוך ושוב זו בחירה של $k=2$ מתוך $n=3$ איברים. אזי התשובה היא $3^2=9$.

3.4.3 צירופים: בחירה בלי החזרה ובלי חשיבות לסדר

הגדרה D3.4

מספר צירופים [combinations] הוא מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים שונים כאשר אין לבחור אותו איבר יותר מפעם אחת (בחירה בלי החזרה) ואין חשיבות לסדר הבחירה.

דוגמא E3.5

מספר האפשרויות לבחור 2 איברים $(k=2)$ מאוסף של שלושה איברים $(n=3)$ $\{a,b,c\}$ כאשר מדובר על בחירה ללא החזרה ובלי חשיבות לסדר הוא 3. האופציות הקיימות הן

$$\{a,b\}\,,\{a,c\}\,,\{b,c\}.$$

טענה. מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים שונים כאשר הבחירה היא ללא החזרה ובלי חשיבות לסדר (מספר צירופים) הוא

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

הוכחה. ניתן לראות כי מספר הצירופים C_n^k ומספר החליפות P_n^k קשורים אחד לשני כ— $C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}$.

סוף הוכחה.

שאלה L3.11

הוכח/הוכיחי כי $C_n^k=C_n^{n-k}$.

שאלה L3.12

בכד 8 כדורים שונים. בכמה אופנים ניתן להוציא ממנו בלי החזרה

א. 3 כדורים?
ב. 4 כדורים?

מקום אסיפת הכדורים לא מוגדר.

פתרון. מדובר על בחירה ללא החזרה. "מקום אסיפת הכדורים לא מוגדר" – פרוש הדבר: אין חשיבות לסדר. התשובה היא

א. $C_8^3=56$ **ב.** $C_8^4=70$.

שאלה L3.13

מצא/י בכמה אופנים ניתן לבחור מכיתה של 15 תלמידים את ועד הכיתה בו 4 תלמידים במקרים הבאים:

א. ללא הגבלה (אין בוועד תפקידים מוגדרים)

ב. בתנאי שתלמיד בשם מסוים חייב להיבחר לוועד
ג. בתנאי שתלמיד בשם מסוים חייב להיבחר ושניים אחרים (גם בשמות מסוימים) אינם יכולים להיבחר?

אין בוועד תפקידים מוגדרים. תלמיד אחד לא יכול להיבחר ליותר מתפקיד אחד.

פתרון. "אין בוועד תפקידים מוגדרים" – פרוש הדבר: בחירה בלי חשיבות לסדר. "תלמיד אחד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד" – פרוש הדבר: בחירה בלי החזרה.

א. התשובה היא $C_{15}^{4}=1365$.

ב. הרכבת הוועד הוא ניסוי דו שלבי. אם תלמיד בשם מסוים חייב להיבחר לוועד, בשלב הראשון בוחרים בתלמיד זה – מספר האופציות לעשות זאת הוא $C_{1}^{1}=1$. בשלב השני אנחנו בוחרים ב–3 תלמידים נוספים מתוך 14 שנשארו – מספר האופציות הוא $C_{14}^{3}=364$. על פי עקרון הכפל, מגעים לתשובה: $C_{1}^{1}\cdot C_{14}^{3}=364$.

ג. מכיוון ששני תלמידים בשמות מסוימים לא יכולים להיבחר לוועד, התשובה היא $C_{1}^{1}\cdot C_{12}^{3}=220$.

שאלה L3.14
בכיס המרצה ישנם 6 מטבעות מזהב, 4 מכסף ו–3 מארד. המרצה מוציא 3 מטבעות בצורה אקראית. מהי ההסתברות שכל המטבעות שיוציא הם מאותו חומר?

פתרון: שאלה מתייחסת **להסתברות**. אזי צריך לחשב את גודל מרחב המדגם ואת גודל המאורע אליו מתייחסת שאלה (במילים אחרות, יש לחשב את מספר האופציות המביאות לבחור 3 מטבעות מאותו חומר).

מרצה מוציא מטבעות בלי החזרה. שאלה גם לא מתייחסת לסדר הבחירה כך שהבחירה היא בחירה לא מסודרת. הוצאה של 3 מטבעות מתוך 13 הנמצאים בכיס מתאימה למרחב המדגם בגודל $|\Omega|=C_{13}^{3}=286$.

נגדיר את המאורע E = {שלושה מטבעות מאותו חומר}. המאורע E מורכב משלושה מאורעות **זרים בזוגות**:
A_G = {שלושה מטבעות מזהב},
A_S = {שלושה מטבעות מכסף}
A_B = {שלושה מטבעות מארד}

כך ש- $E=A_G\cup A_S\cup A_B$. אזי ההסתברות הדרושה $P(E)=P(A_G)+P(A_S)+P(A_B)$.

כדי לחשב שלוש הסתברויות אלו, יש למצוא את מספר האופציות להוציא 3 מטבעות מזהב (מכסף, מארד) מכיס המרצה. 3 מטבעות מזהב הגיעו מחלק הכיס בו נמצאו 6 מטבעות מזהב. אזי מספר האופציות הדרוש הוא $|A_G|=C_{6}^{3}=20$. באותה דרך, $|A_S|=C_{4}^{3}=4$ ו–$|A_B|=C_{3}^{3}=1$. כתוצאה,

$$P(A_G)=\frac{|A_G|}{|\Omega|}=\frac{C_6^3}{C_{13}^3}=\frac{20}{286},\quad P(A_S)=\frac{|A_S|}{|\Omega|}=\frac{C_4^3}{C_{13}^3}=\frac{4}{286},\quad P(A_B)=\frac{|A_B|}{|\Omega|}=\frac{C_3^3}{C_{13}^3}=\frac{1}{286}.$$

אזי, ההסתברות הדרושה היא

$$.P(E)=P(A_G)+P(A_S)+P(A_B)=\frac{25}{286}$$

3.4.4 צירופים: בחירה עם החזרה ובלי חשיבות לסדר

דוגמא E3.6

מספר האפשרויות לבחור 2 איברים $(k=2)$ מאוסף של שלושה איברים $(n=3)$ $\{a,b,c\}$ כאשר מדובר על <u>בחירה עם החזרה ובלי חשיבות לסדר</u> שווה ל—6. האופציות הקיימות הן

$$.\{c,a\}\ ,\{c,c\}\ ,\{b,c\}\ ,\{b,b\}\ ,\{a,b\}\ ,\{a,a\}$$

טענה. מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים **שונים** כאשר הבחירה היא **עם החזרה ובלי חשיבות לסדר** הוא

$$.P_{n+k-1}(k,n-1)=C_{n+k-1}^{k}=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

הוכחה. כדי להבין את ההיגיון מאחורי ההוכחה, נחזור **לדוגמא E3.6** ונציג אותה דרך הטבלה:

הצגה פורמאלית	שכיחות c	שכיחות b	שכיחות a	**אופציות**
√√ I I			√√	$\{a,a\}$
√ I √ I		√	√	$\{a,b\}$
I √√ I		√√		$\{b,b\}$
I √ I √	√	√		$\{b,c\}$
I I √√	√√			$\{c,c\}$
√ I I √	√		√	$\{c,a\}$

כאן, מספר סימני נוכחות √ מסמן שכיחות איבר מסוים באופציה, וסימן הפרדה I מפריד בין איברים שונים. הצגה פורמאלית בטבלה מרמזת כי מספר הבחירות הוא שווה למספר האופציות לסדר 4 איברים בשורה כאשר בתוכם יש שתי תת קבוצות: הראשונה מכילה 2 איברים זהים (√√) והשנייה מכילה גם שני איברים זהים (I I). התשובה במקרה זה היא $.P_4(2,2)=C_4^2=6$

קל לראות כי במקרה הכללי, הצגה פורמאלית תכלול k סימני נוכחות √ ו—$(n-1)$ סימני הפרדה. מספר האופציות לסדר $n-1+k$ איברים בשורה כאשר בתוכם ישנם שתי תת קבוצות בגודל k ו—$(n-1)$ בהתאמה הוא

$$.P_{n+k-1}(k,n-1)=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}=C_{n+k-1}^{k}=\binom{n+k-1}{k}$$

סוף הוכחה.

3.4.5 בחירות: טבלת סיכום

	עם החזרה	בלי החזרה
מסודרת	n^k	P_n^k
לא מסודרת	$P_{n+k-1}(k,n-1)$	C_n^k

3.5 מקדם בינומי ומקדם מולטינומי

נוסחאות קומבינטוריות מכילות שני מקדמים חשובים:

- מקדם בינומי $C_n^k = \binom{n}{k}$
- מקדם מולטינומי $P_n(n_1,\dots,n_k) = \binom{n}{n_1,\dots,n_k}$ עם $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.

שני מקדמים אלה הם חלק בלתי נפרד של שני משפטים הבאים.

משפט T3.1 (משפט ניוטון).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

משפט T3.2 (משפט מולטינומי).

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1\ge 0,\dots,n_k\ge 0):\\ n_1+\dots+n_k=n}} P_n(n_1,\dots,n_k)\, x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k} = \sum_{\substack{(n_1\ge 0,\dots,n_k\ge 0):\\ n_1+\dots+n_k=n}} \binom{n}{n_1,\dots,n_k} x_1^{n_1}\dots x_k^{n_k}.$$

בצורה "מפחידה" יותר:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^n = \sum_{\substack{(n_1\ge 0,\dots,n_k\ge 0):\\ n_1+\dots+n_k=n}} \binom{n}{n_1,\dots,n_k} \prod_{j=1}^{k} x_j^{n_j} = n! \sum_{\substack{(n_1\ge 0,\dots,n_k\ge 0):\\ n_1+\dots+n_k=n}} \prod_{j=1}^{k} \frac{x_j^{n_j}}{n_j!}.$$

3.6 שאלות נוספות

שאלה L3.15

נתונות הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6. כמה מספרים בעלי שש ספרות ניתן לרשום בעזרתן במקרים הבאים?

א. שהספרה הראשונה משמאל היא ספרה אי זוגית.

ב. שהמספר הוא מספר זוגי.
ג. שהספרה 6 איננה ספרת האחידות.

יש לענות על השאלות אם

(1) חלה חובה להשתמש בכל ספרה,
(2) מותר להשתמש באותה ספרה יותר מפעם אחת.

פתרון.
במקרה (1) שחלה חובה להשתמש בכל ספרה, ניתן לראות כי התשובות הן:

א. $3 \cdot 5!$
ב. $3 \cdot 5!$
ג. $5 \cdot 5!$

במקרה (2) שמותר להשתמש באותה ספרה יותר מפעם אחת, ניתן לראות כי התשובות הן:

א. $3 \cdot 6^5$
ב. $3 \cdot 6^5$
ג. $5 \cdot 6^5$

שאלה L3.16
כמה **מספרים** בני 8 ספרות ניתן לרשום בעזרת הספרות

א. 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 0
ב. 8, 8, 6, 6, 6, 6, 0, 0

חובה להשתמש בכל ספרה.

פתרון.
א. המספר הדרוש הוא הפרש בין מספר האופציות להרכיב **קוד** בן 8 ספרות מהספרות הנתונות למספר האופציות להרכיב **קוד** כאשר הספרה הראשונה משמאל היא 0:

$$P_8\,(1,3,2,2) - P_7\,(3,2,2) = 1470 \, .$$

ב. באותה דרך מקבלים:

$$P_8\,(2,4,2) - P_7\,(1,4,2) = 315 \, .$$