PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה מאת יוג'ין קנציפר

הרצאה 2

הסתברות מותנית

• הסתברות מותנית • אי תלות של מאורעות • הסתברות שלמה • משפט בייס •

2.1 הסתברות מותנית

הסתברות מותנית מתארת איך ידע נוסף משפיע על חישוב ההסתברות של מאורע כלשהו.

הגדרה D2.1

ההסתברות המותנית [conditional probability] של המאורע A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B) מסומנת כ—$P(A/B)$ ונתונה על ידי הנוסחא

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

כאן $P(B)\neq 0$.

שאלה L2.1

אהוד ואסתי יוצאים למסעדה. כדי להחליט ביניהם מי ישלם עבור הסעודה, הוחלט להטיל מטבע שלוש פעמים. אם עץ יופיע יותר פעמים מאשר פלי — אסתי תשלם; אחרת ישלם אהוד.

א. מה ההסתברות שאסתי תשלם ומה ההסתברות שיהוד ישלם?

ב. ידוע כי אסתי ואחוד הטילו מטבע פעם אחת ויצא להם עץ. מה עכשיו הסיכויים לכל אחד לשלם?

פתרון.

א. נגדיר את המאורעות A = {אסתי משלמת} ו—B = {אהוד משלם}. רואים כי

$$A=\{HHH,HHT,HTH,THH\}$$

ו—

$$B=\{HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

כיוון שמרחב המדגם הוא

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\},$$

אנוחנו מגיעים לתשובות $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ ו-$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

ב. אם אנחנו נמצאים באמצע הטלות, אזי יש לנו ידע נוסף המאפשר לדייק את ההסתברות לתשלום. עכשיו ידוע כי בהטלה הראשונה יצא עץ. עובדה זו מצמצמת את מרחב המדגם Ω ל—

$$\Omega'=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}.$$

אזי המאורע A = {אסתי משלמת} מצטמצם ל—

$$A'=\{HHH,HHT,HTH\}$$

ומאורע B = {אהוד משלם} הופך להיות

$$B'=\{HTT\}.$$

כתוצאה, הסתברויות לתשלום משתנות:

$$P(A')=\frac{|A'|}{|\Omega'|}=\frac{3}{4} \text{ ו— } P(B')=\frac{|B'|}{|\Omega'|}=\frac{1}{4}.$$

ג. קל לבדוק כי אותן התוצאות מתקבלות מן הנוסחה הכללית להסתברות מותנית

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

ו—

$$P(B/E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}$$

כאשר המאורע E הוא E = {עץ בהטלה הראשונה}.

2.2 אי תלות של מאורעות

2.2.1 אי תלות של שני מאורעות

איך אפשר להגדיר את המונח של "מאורעות בלתי תלויים"? יש לצפות כי עבור מאורעות A ו— B בלתי תלויים מתקיים

$$P(A/B)=P(A)$$

כי עבור מאורעות בלתי תלויים התרחשות של מאורה B לא צריכה להשפיע על התרחשות של מאורע A. כיוון ש—

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

אנחנו מגיעים למסקנה כי עבור מאורעות בלתי תלויים מתקיים השוויון:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

דוגמא E2.1

ניסוי: הטלת מטבע שלוש פעמים

מרחב המדגם: $\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$

מאורע A = {יותר פעמים עץ מאשר פלי}: $A=\{HHH,HHT,HTH,THH\}$

מאורע B = {שתי התוצאות הראשונות הן אותן תוצאות}: $B=\{HHH,HHT,TTH,TTT\}$

מאורע C = {עץ בהטלה האחרונה}: $C=\{HHH,HTH,THH,TTH\}$

האם מאורעות A, B ו— C הם מאורעות בלתי תלויים?

כדי לענות על השאלה, יש לחשב את החיתוכים הזוגיים: $A\cap B=\{HHH,HHT\}$, $A\cap C=\{HHH,HTH,THH\}$ ו— $B\cap C=\{HHH,TTH\}$; ההסתברויות הנדרשות לבדיקת אי התלות הן:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ ,\ P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ ,\ P(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ .$$

כמו כן,

$$P(A\bigcap B)=\frac{|A\bigcap B|}{|\Omega|}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\ ,\ P(B\bigcap C)=\frac{|B\bigcap C|}{|\Omega|}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\ ,\ P(A\bigcap C)=\frac{|A\bigcap C|}{|\Omega|}=\frac{3}{8}\ .$$

כיוון ש– $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ו–$P(B\cap C)=P(B)P(C)$, אנחנו מגיעים למסקנה כי המאורעות A ו–B הם **מאורעות בלתי תלויים**; כמו כן, המאורעות B ו–C הם **מאורעות בלתי תלויים**. לעומת זאת, המאורעות A ו–C הם **מאורעות תלויים** כי $P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$!

2.2.2 אי תלות של יותר משני מאורעות

מהי הדרך להגדרת אי תלות עבור יותר משני מאורעות? נוח להתחיל משלושה מאורעות A, B ו–C. הדרך הטבעית להגדיר אי תלות במקרה זה – לדרוש קיום של התנאים הבאים:

- $P(A/B)=P(A)$,
- $P(A/C)=P(A)$,
- $P(B/C)=P(B)$,

(כך ש– $P(A\bigcap B)=P(A)P(B)$, $P(A\bigcap C)=P(A)P(C)$ ו–$P(B\bigcap C)=P(B)P(C)$, ראה/י פיתוח בסעיף 2.2.1) וגם:

- $P\big((A\bigcap B)/C\big)=P(A\bigcap B)$,
- $P\big((A\bigcap C)/B\big)=P(A\bigcap C)$,
- $P\big((B\bigcap C)/A\big)=P(B\bigcap C)$.

שלושה תנאים אחרונים מביאים: $P(A\bigcap B\bigcap C)=P(A)P(B)P(C)$.

כלומר, שלושה מאורעות A, B ו–C הם מאורעות בלתי תלויים אם מתקיימים ארבעת התנאים הבאים:

$$P(A\bigcap B)=P(A)P(B)\ ,\ P(A\bigcap C)=P(A)P(C)\ ,\ P(B\bigcap C)=P(B)P(C)\ ,$$
$$P(A\bigcap B\bigcap C)=P(A)P(B)P(C)\ .$$

דוגמא E2.2

קל לראות כי עבור שלושת המאורעות שמוגדרים **בדוגמא E2.1**, המאורע $A\bigcap B\bigcap C=\{HHH\}$ כך ש–

$$P\big(A\bigcap B\bigcap C\big)=\frac{|A\bigcap B\bigcap C|}{|\Omega|}=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ .$$

לעומת זאת, שלושת המאורעות האלה הם מאורעות תלויים כי $P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$.

הגדרה D2.2

המאורעות $A_1,A_2,\dots,A_n$ הם מאורעות **בלתי תלויים** אם עבור כל סט אפשרי $A_{i_1},A_{i_2},\dots,A_{i_k}$ ($2\le k\le n$) מסודר $1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n$ מתקיים

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})\ .$$

2.3 הסתברות שלמה

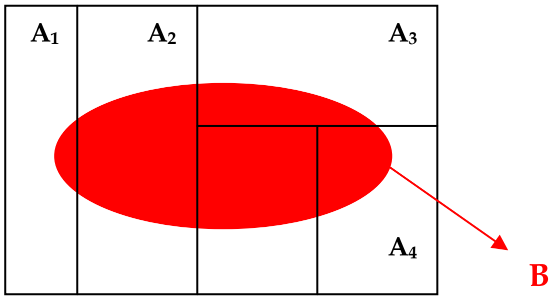
נוסחא להסתברות שלמה מאפשרת חישוב הסתברות של מאורע כלשהו על סמך <u>ידע חלקי</u>.

נוסחא להסתברות שלמה

אם $A_1, A_2, \ldots$ הם מאורעות זרים בזוגות, ($A_i \cap A_j = \varnothing$ עבור כל זוג $i \neq j$), ואיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (זאת אומרת $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \Omega$), אזי לכל מאורע $B \subseteq \Omega$ מתקיים:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n).$$

הוכחה. נצטייר בדיאגרמת וון:



מאורע B מורכב מי מאורעות $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ... ו-$B \cap A_n$ כך ש-$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$.
כיוון שהמאורעות $B \cap A_1$, $B \cap A_2$, ... ו-$B \cap A_n$ הם מאורעות זרים בזוגות, על פי **אקסיאומה מספר שלוש** של קולמוגורוב, מתקיים:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i).$$

לקיחת בחשבון של נוסחא להסתברות מותנית,

$$P(B \cap A_i) = P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

מביאה לנו את הנוסחא הדרושה:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i).$$

שאלה L2.2

מוכר גלידה אמור להחליט האם הוא צריך להזמין עוד מלאי לסוף שבוע. הוא מעריך שההסתברות למכור את כל המלאי היא 90% בתנאי שמזג האוויר חם. אם יהיה מעונן, ההסתברות יורדת ל-60%. בתנאי הגשם ההסתברות למכור את כל המלאי היא רק 20%.

לפי תחזית מזג האוויר, ההסתברות שמזג האוויר יהיה חם היא 30%, ההסתברות שמזג האוויר יהיה מעונן היא 45% וההסתברות הגשם היא 25%. מה ההסתברות השלמה שהמוכר ימכור את כל המלאי?

פתרון.

נגדיר את המאורעות הבאים: A_1 = {מזג אוויר חם}, A_2 = {מזג אוויר מעונן} ו— A_3 = {גשם}. המאורע B הוא B = {מוכר ימכור את כל המלאי}. על פי נתוני השאלה: $P(A_1)=0.3$, $P(A_2)=0.45$ ו— $P(A_3)=0.25$. כמו כן, נתונות הסתברויות מותנות הבאות: $P(B/A_1)=0.9$, $P(B/A_2)=0.6$ ו— $P(B/A_3)=0.2$. אחרי בדיקת תנאי הנוסחא להסתברות שלמה, אנחנו יכולים להשתמש בנוסחא:

$$P(B)=P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+P(B/A_3)\cdot P(A_3)$$

הצבת נתונים מביאה: $P(B)=0.9\cdot 0.3+0.6\cdot 0.45+0.2\cdot 0.25\approx 0.59$.

2.4 משפט בייס

משפט. עבור מאורעות A ו- B מתקיים:

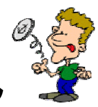
$$P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}.$$

כאן, $P(A)\neq 0$ ו— $P(B)\neq 0$.

הוכחה. יש להכפיל שני צדדים של הנוסחא ב— $P(B)$, להשתמש בנוסחא להסתברות מותנית ולהיעזר בחוק קומוטטיבי.

הערה. אם $A_1,A_2,\ldots$ הם מאורעות זרים בזוגות ואיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$, אזי לכל מאורע $B\subseteq\Omega$ מתקיים:

$$P(A_i/B)=\frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B/A_j)\cdot P(A_j)}.$$



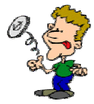
שאלה L2.3

בתנאי השאלה **L2.2**, מהי ההסתברות שמזג האוויר היה שמשי אם נתון כי מוכר מכר את כל המלאי?

פתרון. צריכים לחשב $P(A_1/B)$. משפט בייס אומר כי

$$P(A_1/B)=\frac{P(B/A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)}.$$

אזי הצבת נתונים מביאה את התשובה: $P(A_1/B)=\frac{0.9\cdot 0.3}{0.59}\approx 0.46$.



שאלה L2.4

בוחרים אקראית בין מכוניות הנעות בכביש מסוים. נתון כי הסתברות למצוא אוטו בצבע צהוב היא 3/100; הסתברות למצוא נהגת בלונדינית היא 1/5; הסתברות למצוא אוטו צהוב ונהגת בלונדינית היא 1/50.

א. בחרת באוטו צהוב. מהי ההסתברות שנהגת בלונדינית?
ב. מהי ההסתברות של אוטו צהוב אם ידוע כי נהגת בלונדינית?
ג. האם מאורעות A ו- B בלתי תלויים?

פתרון. נגדיר את המאורעות הבאים: A = {אוטו צהוב} ו- B = {נהגת בלונדינית}. נתון כי $P(A)=3/100$, $P(B)=1/5$ ו- $P(A\cap B)=1/50$.

א. צריך לחשב $P(B/A)$. מקבלים: $P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{1/50}{3/100}=\dfrac{2}{3}$.

ב. צריך לחשב $P(A/B)$. מקבלים: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/50}{1/5}=\dfrac{1}{10}$.

דרך אחרת: על פי משפט בייס $P(A/B)=\dfrac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}=\dfrac{2/3\cdot 3/100}{1/5}=\dfrac{1}{10}$

ג. צריך לבדוק האם $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. מכיוון ש- $P(A)=3/100$, $P(B)=1/5$ ו- $P(A\cap B)=1/50$, מקבלים כי $1/50\neq 3/100\cdot 1/5$ ולכן המאורעות A ו- B הם תלויים אחד בשני!

שאלה L2.5

2% מאוכלוסיה סובלים ממחלת דם בצורה קשה, 10% בצורה בינונית ול-88% אין מחלה בכלל. חוקרים פיתחו מכשיר חדש לבדיקת קיום המחלה. הסתברות שבדיקה באמצעות המכשיר תצביע חיובית (מחלה קיימת) היא 0.9 אם הנבדק סובל קשה מהמחלה, 0.6 אם הנבדק סובל בינונית, ו—0.1 אם לנבדק אין מחלה בכלל.

נעשתה בדיקה לאדם שנבחר מקרית מאוכלוסיה והמכשיר הצביע חיובית. מהי ההסתברות שנבדק זה סובל ממחלת דם בצורה קשה?

פתרון. נגדיר את המאורעות הבאים: A_1 = {אדם סובל ממחלה בצורה קשה}, A_2 = {אדם סובל ממחלה בצורה בינונית}, A_3 = {לאדם אין מחלה כלל} ו— B = {מכשיר הצביע חיובית}.

נתון כי $P(A_1)=0.02$, $P(A_2)=0.1$, $P(A_3)=0.88$. גם ידוע כי $P(B/A_1)=0.9$, $P(B/A_2)=0.6$, $P(B/A_3)=0.1$. צריך לחשב $P(A_1/B)$. על פי משפט בייס $P(A_1/B)=\dfrac{P(B/A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)}$. כדי לחשב $P(B)$ נשתמש בנוסחא להסתברות שלמה:

$$P(B)=P(B/A_1)\cdot P(A_1)+P(B/A_2)\cdot P(A_2)+P(B/A_3)\cdot P(A_3) .$$

מקבלים: $P(B)=0.166$. אזי $P(A_1/B)=\dfrac{0.9\cdot 0.02}{0.166}\approx 0.108$.

שאלה L2.6

במשפחה שני ילדים.

א. מהי ההסתברות ששניהם בנים אם ידוע כי לפחות ילד אחד הוא בן?

ב. מהי ההסתברות ששניהם בנים אם ידוע כי הבכור הוא בן?

פתרון.

א. נתחיל ממרחב המדגם Ω. מבחינת מן הילדים, $\Omega=\{MM,MF,FM,FF\}$. נגדיר שני מאורעות: A = {שני הילדים בנים} ו–B = {לפחות ילד אחד הוא בן}. ההסתברות הדרושה היא

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}=\frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

כאן השתמשנו בגישה קלאסית להסתברות. כיוון ש–

$$A=\{MM\} \text{ ו–} B=\{MM,MF,FM\}$$

מקבלים כי $A\cap B=\{MM\}$ כך ש–$P(A/B)=\dfrac{|A\cap B|}{|B|}=\dfrac{1}{3}$.

ב. כאן אנחנו מגדירים מאורע נוסף C = {הבכור הוא בן}, $C=\{MM,MF\}$. ההסתברות הדרושה היא

$$P(A/C)=\frac{|A\cap C|}{|C|}.$$

חישוב פשוט מביא: $A\cap C=\{MM\}$ כך ש–$P(A/C)=\dfrac{|A\cap C|}{|C|}=\dfrac{1}{2}$.