PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

■ דף פתרונות לשאלות בית 10

10.1 בעיות אמידה קשורות להתפלגות-- t ו— χ^2

■

שאלה H10.1

רווח סמך לתוחלת. משתמשים בנוסחה

$$\overline{X}_{(n)} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{\hat{S}_{(n)}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_{(n)} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{\hat{S}_{(n)}}{\sqrt{n}}.$$

ממוצע המדגם: $\overline{X}_{(10)} = \frac{1}{10}\left(604+592+\ldots+593+590\right)\approx 594.9$.

אומדן לשונות: $\hat{S}^2_{(10)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \approx 29.88 \Leftarrow \hat{S}_{(10)}=5.47$.

פרמטר: $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.262$ (כאן, $\alpha=1-0.95=0.05$).

כתוצאה,

$$594.9-2.262\cdot\frac{5.47}{\sqrt{10}} < \mu < 594.9+2.262\cdot\frac{5.47}{\sqrt{10}}$$

כך ש—

$$591.0<\mu<598.8.$$

רווח סמך לסטיית תקן. משתמשים בנוסחה

$$\sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}.$$

פרמטרים: $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)=\chi^2_{0.025}(9)=19.023$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu)=\chi^2_{0.975}(9)=2.7$

(כאן, $\alpha=1-0.95=0.05$).

כתוצאה,

$$\sqrt{\frac{9\cdot 29.88}{19.023}} < \sigma < \sqrt{\frac{9\cdot 29.88}{2.7}}$$

כך ש—

$3.76 < \sigma < 9.98$.

שאלה H10.2

א. אומדן לתוחלת: $\overline{X} = \frac{1}{25}\sum_k X_k = \frac{300}{25} = 12$,

אומדן לשונות: $\hat{S}^2 = \frac{1}{24}\sum_k \left(X_k - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_k X_k^2 - \frac{1}{25}\left(\sum_k X_k\right)^2\right) = 10$.

ב. רווח סמך $\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. כאן, $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} \approx 1.645$ ו— $\sigma = 2$.

חישוב מביא: $11.34 < \mu < 12.66$.

ג. רווח סמך $\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$. כאן,

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.05}(24) \approx 1.711$ ו— $\hat{S} \approx 3.16$.

חישוב מביא: $10.9 < \mu < 13.1$.

שאלה H10.3

צריך לחשב את ההסתברות $p = P\left(\sum_{k=1}^{3} X_k^2 \le 16\right)$ עבור $X_k \sim N\left(0, \sqrt{2}\right)$. אם נגדיר משתנים מקריים נורמליים סטנדרטיים $Z_k = \frac{X_k}{\sqrt[4]{2}} \sim N(0,1)$, ההסתברות הדרושה הופחת ל— $p = P\left(\sum_{k=1}^{3} Z_k^2 \le 8\sqrt{2}\right)$. מ ההרצאה עולה כי $\sum_{k=1}^{3} Z_k^2 \sim \chi^2(3)$. כתוצאה,

$$p = P\left(\sum_{k=1}^{3} Z_k^2 \le 8\sqrt{2}\right) = \int_0^{8\sqrt{2}\approx 11.3} dy f_Y(y;3) = 1 - 0.01 = 0.99.$$

בחישוב של האינטגרל האחרון השתמשנו בטבלת χ^2 ובהגדרה: $\int_0^{\chi^2_\alpha(n)} dy f_Y(y;n) = 1 - \alpha$.

שאלה H10.4

ראה/י פתרון של שאלה מס' 6, מבחן מועד ב' 10.08.2006.