PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

2006/07 כל הזכויות שמורות © Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07

■ דף פתרונות לשאלות בית 8

8.1 משפט הגבול המרכזי
8.2 החוק החלש של המספרים הגדולים

■

שאלה H8.1

יהיה X_j רווח השחקן במשחק ה—j. ההסתברות שקופה בה היו 100 ש"ח לפני תחילת המשחק תספיק לסדרה של 50 הטלות היא $P\left(\sum_{j=1}^{50} X_j \le 100\right)$. על פי משפט הגבול המרכזי,

$$\sum_{j=1}^{50} X_j \sim N(50\underbrace{E[X_j]}_{0}, 50\underbrace{\mathrm{var}[X_j]}_{46.7}) = N(0,2335).$$

(כאן, השתמשנו בפתרון שאלה H5.9). אזי,

$$P\left(\sum_{j=1}^{50} X_j \le 100\right) = \Phi\left(\frac{100+\frac{1}{2}-0}{\sqrt{2335}}\right) \approx \Phi(2.08) \approx 0.9812.$$

יש לשים לב לתקון רציפות!

שאלה H8.2

א. תוחלת של כל אחד מ—X_j היא $\mu = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0$ כאשר השונות היא

$$\sigma^2 = \frac{(0.5-(-0.5))^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

על פי משפט הגבול המרכזי,

$$P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j > 1\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j \le 1\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1-12\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}\cdot 12}}\right) = 1-\Phi(1) \approx 0.1587.$$

ב. חישוב דומה מביא:

$$P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j \le 2\right) = \Phi\left(\frac{2-12\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}\cdot 12}}\right) = \Phi(2) \approx 0.9772.$$

שאלה H8.3

א. בשלב הראשון, נחשב תוחלת ושונות של משקל Y של אבטיח:

$$\mu = E[Y] = \sum_y yP_Y(y) = \frac{9}{4},$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}[Y] = \sum_y y^2 P_Y(y) - \left(\sum_y yP_Y(y)\right)^2 = \frac{11}{16}.$$

נסמן ב— S את המשקל הכולל של 1000 אבטיחים: $S = \sum_{k=1}^{1000} Y_k$. על פי משפט הגבול המרכזי,

$$S = \sum_{k=1}^{1000} Y_k \sim N\left(1000\cdot\frac{9}{4}, 1000\cdot\frac{11}{16}\right).$$

יש לבדוק האם אי שוויון $P(S \le 2500) \ge 0.9$ מתקיים. חישוב פשוט מביא:

$$P(S \le 2500) = \Phi\left(\frac{2500+\frac{1}{2}-1000\cdot\frac{9}{4}}{\sqrt{1000\cdot\frac{11}{16}}}\right) \approx \Phi(9.53) \approx 1 \ge 0.9$$

כתוצאה, התשובה היא "המשאית כן תספיק".

ב. המשוואה

$$P(S \le K) = \Phi\left(\frac{K+\frac{1}{2}-1000\cdot\frac{9}{4}}{\sqrt{1000\cdot\frac{11}{16}}}\right) \ge 0.9$$

מביאה:

$$\frac{K+\frac{1}{2}-1000\cdot\frac{9}{4}}{\sqrt{1000\cdot\frac{11}{16}}} \ge 1.28,$$

כך ש—

$$K \ge 2283.1.$$

שאלה H8.4

יהיה X_k שינוי יומי במחיר המניה. יש לחשב $P\left(\sum_{k=1}^{10} X_k > 10\right)$. נתייחס למספר 10 כלמספר גדול. בהנחת אי התלות בין שינויים בעלות המניה בימים שונים, מותר להשתמש במשפט הגבול המרכזי אשר מביא: $\sum_{k=1}^{10} X_k \sim N(0,10)$. אזי, ההסתברות הדרושה היא

$$P\left(\sum_{k=1}^{10} X_k > 10\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{10} X_k \le 10\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10-0}{\sqrt{10}}\right) \approx 0.0005.$$

שאלה H8.5

א. יהיה X לחץ דם עליון של בן אדם שנבחר מקרית. על פי נתוני השאלה, $X \sim N(130,225)$. ההסתברות הדרושה היא

$$P(X > 133) = 1 - P(X \le 133) = 1 - \Phi\left(\frac{133-130}{15}\right) \approx 0.42 .$$

ב. יהיה $\overline{X}$ ממוצע לחץ דם עליון המחושב על סמך המדגם של 225 איש. מתקיים: $\overline{X} \sim N\left(130, \frac{15^2}{225}\right)$. ההסתברות הדרושה היא

$$P(\overline{X} > 133) = 1 - P(\overline{X} \le 133) = 1 - \Phi(3) \approx 0.0013 .$$

שאלה H8.6

נסמן ב—X_k^B את רוחב הספר ה—k וב—X_k^J את רוחב כתב האת ה—k. אזי אורכי סדרת הספרים X_B וסדרת כתבי את X_J הם

$$X_B = \sum_{k=1}^{N_B} X_k^B$$

ו—

$$X_J = \sum_{k=1}^{N_J} X_k^J$$

בהתאמה.

כיוון ש—N_B ו—N_J הם מספרים גדולים, על פי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$X_B \sim N(N_B\mu_B, N_B\sigma_B^2), \quad X_J \sim N(N_J\mu_J, N_J\sigma_J^2) .$$

נגדיר את ההפרש $\Delta = X_B - X_J$. ההסתברות הדרושה היא $P(\Delta > 0)$. מתקיים:

$$\Delta \sim N(N_B\mu_B - N_J\mu_J, N_B\sigma_B^2 + N_J\sigma_J^2) .$$

חישוב פשוט מביא:

$$P(\Delta > 0) = 1 - P(\Delta < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{N_J\mu_J - N_B\mu_B}{\sqrt{N_B\sigma_B^2 + N_J\sigma_J^2}}\right)$$

כך ש—

$$P(\Delta > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{7.45}}\right) \approx 1 - \Phi(1.83) = 0.034 .$$