PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

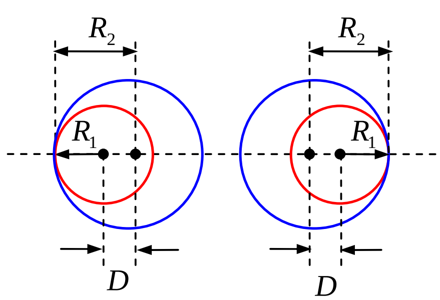
■ דף פתרונות לשאלות בית ד

ד.1 משתנה מקרי רציף
ד.2 התפלגויות רציפות מיוחדות

■

שאלה ד.1H

הציור מראה כי את ההסתברות הדרושה אפשר לכתוב בצורה



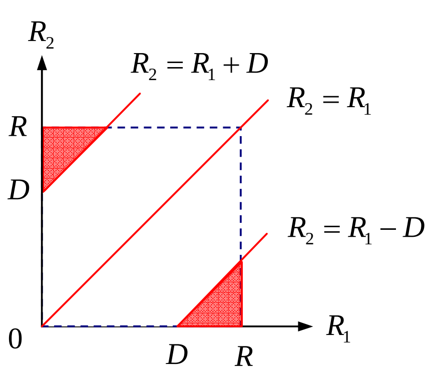
$$P_0 = P(D \le R_2 - R_1 / R_2 > R_1)P(R_2 > R_1)$$
$$+ P(D \le R_1 - R_2 / R_1 > R_2)P(R_1 > R_2)$$

מכאן ניתן לראות כי

$$.P_0 = P(D \le |R_2 - R_1|)$$

כיוון ש— $R_1 \sim U(0,R)$ ו— $R_2 \sim U(0,R)$, מותר להשתמש בגישה הקלאסית להסתברות.

- עבור $0 \le D \le R$ מתקיים:



$$P_0 = \frac{|\{D \le |R_2 - R_1|\}|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(R-D)^2}{R^2}$$
$$= \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2.$$

- עבור $D > R$, ההסתברות $P_0 = 0$ כך שהתשובה הסופית היא

$$.P_0 = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2 \Theta(R - D)$$

כאן $\Theta(x)$ היא פונקצית מדרגה של דירק:

$$\Theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$$

שאלה H7.2

א. על פי הגדרתה, פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_{T_f}(t)$ היא

$$F_{T_f}(t)=P(T_f\leq t)=P\left(\frac{2v}{g}\sin(\theta)\leq t\right)=P\left(\sin\theta\leq\frac{gt}{2v}\right)$$
$$=\Theta\left(t-\frac{2v}{g}\right)+\Theta\left(\frac{2v}{g}-t\right)P\left(\theta\leq\arcsin\frac{gt}{2v}\right).$$

כיוון ש— $\theta\sim U\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, הסתברות זו הינה

$$P\left(\theta\leq\arcsin\frac{gt}{2v}\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{gt}{2v}$$

כך ש—

$$F_{T_f}(t)=\Theta\left(t-\frac{2v}{g}\right)+\frac{2}{\pi}\Theta\left(\frac{2v}{g}-t\right)\arcsin\frac{gt}{2v}$$
$$=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{gt}{2v}, & 0\leq t<2v/g\\ 1, & t\geq 2v/g\end{cases}.$$

ב. פונקצית הצפיפות היא

$$f_{T_f}(t)=\frac{d}{dt}F_{T_f}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{2g}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4v^2-g^2t^2}}, & 0\leq t<2v/g\\ 0, & t\geq 2v/g\end{cases}.$$

בדיקת נירמול:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt\,f_{T_f}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{2v/g}\frac{dt}{\sqrt{(2v/g)^2-t^2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$$

ג. חישוב התוחלת:

$$E[T_f]=\int_0^{2v/g}dt\cdot t f_{T_f}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{2v/g}\frac{dt\cdot t}{\sqrt{(2v/g)^2-t^2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2v/g)^2}\frac{dx}{\sqrt{(2v/g)^2-x}}$$
$$=-\frac{2}{\pi}\sqrt{(2v/g)^2-x}\Big|_0^{(2v/g)^2}=\frac{4v}{\pi g}$$

שאלה H7.3

א. הקשר בין המקדמים a ו— b לבין השורשים x_1 ו— x_2 נתון על ידי זוג הנוסחאות

$$x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \quad \text{ו—} \quad x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

אשר מביאות

$$\left\{ \begin{aligned} a &= -(x_1 + x_2), \\ b &= x_1 x_2. \end{aligned} \right.$$

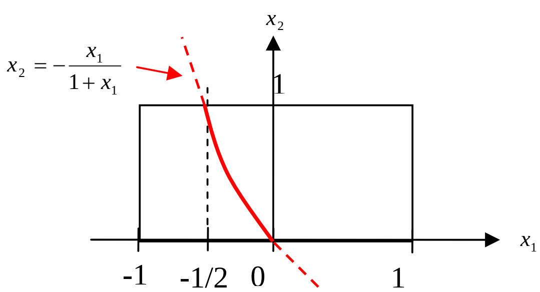
ההסתברות הדרושה, $P(a>b)$, היא

$$P(a>b) = P(-(x_1+x_2) > x_1 x_2) = P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right).$$

בשויון האחרון, השתמשנו בעובדה ש— $1+x_1$ אינו שלילי. על פי גישה קלאסית להסתברות,

$$P\left(x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right) = \frac{\left| \left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\} \right|}{|\Omega|}.$$

מהציור עולה, כי גודל מרחב המדגם הוא $|\Omega| = 2$. גודל המאורע $\left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\}$ הוא:



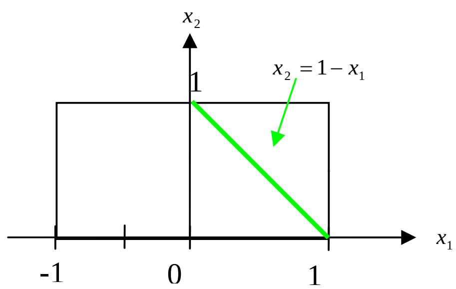
$$\left| \left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\} \right| = \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(-\frac{x_1}{1+x_1} \right) dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x_1+1-1}{1+x_1} dx_1 = \frac{1}{2} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(1 - \frac{1}{1+x_1} \right) dx_1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{1+x_1} dx_1 = \ln(1+x_1)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \ln 2.$$

זה מביא

$$P(a<b) = \frac{\left| \left\{ x_2 < -\frac{x_1}{1+x_1} \right\} \right|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

ב. ההסתברות הדרושה היא הסתברות מותנית

$$P(b>0\ /\ a>-1)=P(x_1x_2>0\ /\ -(x_1+x_2)>-1)=P(x_1>0\ /\ x_2<1-x_1)$$
$$=\frac{P(x_1>0\bigcap x_2<1-x_1)}{P(x_2<1-x_1)}$$



מהציור עולה (גישה קלאסית להסתברות) כי

$$P(x_1>0\bigcap x_2<1-x_1)=\frac{|\{x_1>0\}\bigcap\{x_2<1-x_1\}|}{|\Omega|}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}.$$

וגם

$$P(x_2<1-x_1)=\frac{|\{x_2<1-x_1\}|}{|\Omega|}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

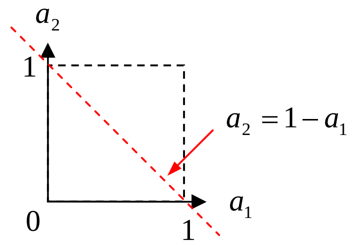
כך ש—

$$P(b>0\ /\ a>-1)=\frac{P(x_1>0\bigcap x_2<1-x_1)}{P(x_2<1-x_1)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}.$$

שאלה Hד.4

א. נוכל לבנות משולש בצלעות אלה במידה ו—$a_1+a_2>1$. אזי, ההסתברות הדרושה היא $P(a_1+a_2>1)=P(a_2>1-a_1)$. על פי גישה קלאסית להסתברות (ראה/י ציור),

$$P(a_2>1-a_1)=\frac{1}{2}.$$



ב. הזווית φ ניתנת על ידי הנוסחא

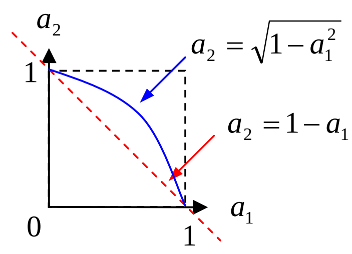
$$\cos\varphi=\frac{a_1^2+a_2^2-1}{2a_1a_2}.$$

עבור $0<\varphi<90^\circ$,

$0<\cos\varphi=\dfrac{a_1^2+a_2^2-1}{2a_1a_2}<1$ כך שההסתברות הדרושה היא הסתברות מותנית:

$$P\left(0<a_1^2+a_2^2-1<2a_1a_2\ /\ a_2>1-a_1\right)=\frac{P\left(\left\{0<a_1^2+a_2^2-1<2a_1a_2\right\}\cap\left\{a_2>1-a_1\right\}\right)}{P\left(a_2>1-a_1\right)}$$
$$=2P\left(\left\{a_2>\sqrt{1-a_1^2}\right\}\cap\left\{a_2>1-a_1\right\}\right).$$

מהציור עולה כי



$$P\left(\left\{a_2>\sqrt{1-a_1^2}\right\}\cap\left\{a_2>1-a_1\right\}\right)=1-\int_0^1 da_1\sqrt{1-a_1^2}$$
$$=1-\int_0^{\pi/2}d\vartheta\cos^2\vartheta=1-\int_0^{\pi/2}d\vartheta\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}$$
$$=1-\frac{\pi}{4}.$$

כתוצאה, ההסתברות הנשאלת היא

$$.\ P\left(0<a_1^2+a_2^2-1<2a_1a_2\ /\ a_2>1-a_1\right)=2-\frac{\pi}{2}$$

שאלה H7.5

א. פונקצית צפיפות היא פונקציה זוגית. הנתון $E[X]=0$ מוביל לתחום סימטרי $|X|<X_0$.

מתנאי השאלה עולה כי $E\left[|X|\right]=\int_{-X_0}^{+X_0}|x|\,f(x)\,dx=2c\int_0^{X_0}x\left(x^2+x\right)dx=1$.

הנרמול מביא את המשוואה:

$$.\ \int_{-X_0}^{+X_0}f(x)\,dx=2c\int_0^{X_0}\left(x^2+x\right)dx=1$$

קבלנו שתי משוואות:

$$(*)\qquad\begin{cases}2c\left(\dfrac{X_0^4}{4}+\dfrac{X_0^3}{3}\right)=1\\[2mm]2c\left(\dfrac{X_0^3}{3}+\dfrac{X_0^2}{2}\right)=1\end{cases}$$

כתוצאה, $\dfrac{X_0^4}{4}+\dfrac{X_0^3}{3}=\dfrac{X_0^3}{3}+\dfrac{X_0^2}{2}$ כך ש— $X_0=\sqrt{2}$ והתחום הוא $-\sqrt{2}<X<\sqrt{2}$.

ב. את הפרמטר c מחשבים, למשל, מהנוסחא השנייה ב—(*):

$$c = \frac{1}{2\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \approx 0.257$$

ג. מחשבים את פונקציה ההתפלגות המצטברת על פי הגדרתה:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < -\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} + c\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right), & -\sqrt{2} \le t < 0 \\ \frac{1}{2} + c\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right), & 0 \le t < \sqrt{2} \\ 1, & t \ge \sqrt{2} \end{cases}$$

ד.

$$P(|X| < c) = \int_{-c}^{+c} f(x)\,dx = 2c\int_0^c \left(x^2 + x\right)dx = \frac{2}{3}c^4 + c^3 \approx 0.02 .$$

שאלה H7.6

ראה/י את הפתרון לשאלה מס' 4 של המבחן "הסתברות וסטטיסטיקה למתמטיקה שימושית" שהתקיים בתאריך 10.08.2006 (מועד ב'):

http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper/teaching/ps/exams/am/2006/AM.100806.pdf

שאלה H7.7

א. בשלב הראשון, נחשב את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_{T_j}(t)$ של T_j. על פי הגדרתה,

$$F_{T_j}(t) = P(T_j \le t) = 1 - P(T_j > t) .$$

עבור ההסתברות $P(T_j > t)$ מתקיים:

$$P(T_j > t) = \sum_{k=0}^{j-1} P(X_t = k) ,$$

כלומר,

$$P(T_j > t) = \sum_{k=0}^{j-1} P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{j-1}(1-e^{-\lambda t})^k = e^{-\lambda t}\frac{1-(1-e^{-\lambda t})^j}{1-(1-e^{-\lambda t})} = 1-(1-e^{-\lambda t})^j .$$

כתוצאה,

$$F_{T_j}(t) = P(T_j \le t) = 1 - P(T_j > t) = (1-e^{-\lambda t})^j .$$

פונקצית הצפיפות הינה

$$f_{T_j}(t) = \frac{d}{dt}F_{T_j}(t) = \frac{d}{dt}(1-e^{-\lambda t})^j = j\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1} .$$

ב. בדיקת נירמול:

$$\int_0^\infty dt\, f_{T_j}(t) = j\lambda \int_0^\infty dt\; e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}.$$

נגדיר משתנה אינטגרציה חדש, $y = e^{-\lambda t}$ כך ש—

$$dt = -\frac{1}{\lambda}\frac{dy}{y}$$

ו—

$$\int_0^\infty dt\, f_{T_j}(t) = j\int_0^1 \frac{dy}{y}\; y(1-y)^{j-1} = j\int_0^1 dy(1-y)^{j-1} = -(1-y)^j\Big|_0^1 = 1.$$

ג. חישוב התוחלת:

$$E[T_j] = \int_0^\infty dt \cdot t f_{T_j}(t) = j\lambda \int_0^\infty dt\; e^{-\lambda t} t(1-e^{-\lambda t})^{j-1}.$$

על פי הערה,

$$\int_0^\infty dx\; xe^{-x}(1-e^{-x})^{j-1} = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}$$

כך ש—

$$E[T_j] = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}.$$

שאלה H7.8

מצד אחת, פונקצית צפיפות ההסתברות $f_{T_j}(t)$ קשורה לפונקצית ההתפלגות המצטברת $F_{T_j}(t)$ של זמן ההמתנה T_j דרך הנוסחא

$$F_{T_j}(t) = \int_0^t d\tau\; f_{T_j}(\tau).$$

מצד שני, אותה פונקצית ההתפלגות המצטברת קשורה לפונקצית ההסתברות $P(X_t = k)$ למציאת בדיוק k התרחשויות בפרק הזמן $(0,t)$ דרך הנוסחא

$$F_{T_j}(t) = P(T_j \le t) = 1 - P(T_j > t) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} P(X_t = k).$$

שילוב של שתי הנוסחאות מביא:

$$\int_0^t d\tau\; f_{T_j}(\tau) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} P(X_t = k).$$

על מנת למצוא את $P(X_t = k)$ נכתוב את הנוסחא הקודמת עבור $j \mapsto j+1$:

$$\int_0^t d\tau\; f_{T_{j+1}}(\tau) = 1 - \sum_{k=0}^{j} P(X_t = k).$$

חישוב ההפרש בין שתי הנוסחאות האחרונות מביא את התשובה הסופית:

$$P(X_t = j) = \int_0^t d\tau\, f_{T_{j+1}}(\tau) - \int_0^t d\tau\, f_{T_j}(\tau).$$

מעניין לראות איך הנוסחא "עובדת". בשאלה H7.7 הוכחנו כי בזרם אירועים גיאומטרי פונקצית צפיפות ההסתברות $f_{T_j}(t)$ של זמן ההמתנה T_j היא

$$f_{T_j}(t) = j\lambda e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-1}.$$

מהי פונקצית ההסתברות $P(X_t = j)$? על פי הנוסחא שפיתחנו בשאלה זו, יש לחשב

$$\int_0^t d\tau\, f_{T_j}(\tau) = j\lambda \int_0^t d\tau\, e^{-\lambda\tau}\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right)^{j-1} = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^j.$$

אזי, בגלל הנוסחא

$$P(X_t = j) = \int_0^t d\tau\, f_{T_{j+1}}(\tau) - \int_0^t d\tau\, f_{T_j}(\tau)$$

אנחנו מגיעים לטענה:

$$P(X_t = j) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j+1} - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^j = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^j \left(1 - (1 - e^{-\lambda t})\right) = e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^j.$$

תוצאה זו תאומת נתוני השאלה H7.7.