PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

2006/07 כל הזכויות שמורות © Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07

■ דף פתרונות לשאלות בית 4

4.1 פונקצית הסתברות ופונקצית התפלגות מצטברת

4.2 מדדים של משתנה מקרי

שאלה H4.1

א. מהטבלה נובע כי $E[X]=0$, $\mathrm{var}[X]=2\left(p^2+4p\right)$. כתוצאה, $p^2+4p-\frac{1}{2}=0$ כך ש— $p_1=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ו— $p_2=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$. מכיוון ש— p הוא הסתברות $(0\le p\le 1)$, אנחנו חייבים לשלול את הפתרון הראשון. אזי, $p=p_2=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\approx 0.121$.

כדי למצוא את הערך של q נשתמש בתכונות הנורמול: $\sum_x P_X(x)=1$. היא מביאה $q=1-2p-2p^2=3\left(3\sqrt{2}-4\right)\approx 0.728$.

ב. פונקצית התפלגות מצטברת:

$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<-2,\\ p, & -2\le t<-1,\\ \frac{1}{2}-3p, & -1\le t<0,\\ \frac{1}{2}+3p, & 0\le t<1,\\ 1-p, & 1\le t<2,\\ 1, & t\ge 2. \end{cases}$$

ג. חישוב ההסתברויות:

$$P(X<1)=P(X=0)+P(X=-1)+P(X=-2)$$
$$=p+p^2+q=3p+\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{2}-11}{2}\approx 0.86$$
$$P(X\ge -1)=1-P(X=-2)=1-p=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\approx 0.88,$$

$$P(X \geq 0 / |X| < 2) = \frac{P(X \geq 0 \bigcap |X| < 2)}{P(|X| < 2)} = \frac{P(0 \leq X \leq 1)}{P(-1 \leq X \leq 1)}$$
$$= \frac{2p + 1/2}{1 - 2p} = \frac{6\sqrt{2} - 7}{10 - 6\sqrt{2}} \approx 0.98$$

ד. מטבלת ההסתברות נובע כי $E[X] = 0$.

ה. חישוב:

$$E[X^3 + 2] = E[X^3] + 2 = 2,$$

$$\mathrm{var}[X + 5] = \mathrm{var}[X] = 1.$$

ו. חציון: $M = 0$.

שאלה H4.2

מרחב המדגם בניסוי זה הוא

$$\Omega = \begin{matrix} \{11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\ 21, & 22, & 23, & 24, & 25, & 26, \\ 31, & 32, & 33, & 34, & 35, & 36, \\ 41, & 42, & 43, & 44, & 45, & 46, \\ 51, & 52, & 53, & 54, & 55, & 56, \\ 61, & 62, & 63, & 64, & 65, & 66\} \end{matrix}$$

א. ערכים אפשריים של X הם ערכים שלמים בתחום $2 \leq X \leq 12$.

ב. פונקצית ההסתברות ניתנת על ידי הטבלה:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

למשל, עבור $X = 4$ התשובה ניתנת על ידי סכום הסתברויות עבור התוצאות: (31), (22), (13) השווה ל— $\frac{3}{36}$.

ג. פונקצית ההתפלגות המצטברת:

$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<2,\\ \frac{1}{36}, & 2\le t<3,\\ \frac{3}{36}, & 3\le t<4,\\ \frac{6}{36}, & 4\le t<5,\\ \frac{10}{36}, & 5\le t<6,\\ \frac{15}{36}, & 6\le t<7,\\ \frac{21}{36}, & 7\le t<8,\\ \frac{26}{36}, & 8\le t<9,\\ \frac{30}{36}, & 9\le t<10,\\ \frac{33}{36}, & 10\le t<11,\\ \frac{35}{36}, & 11\le t<12,\\ 1, & t\ge 12 \end{cases}$$

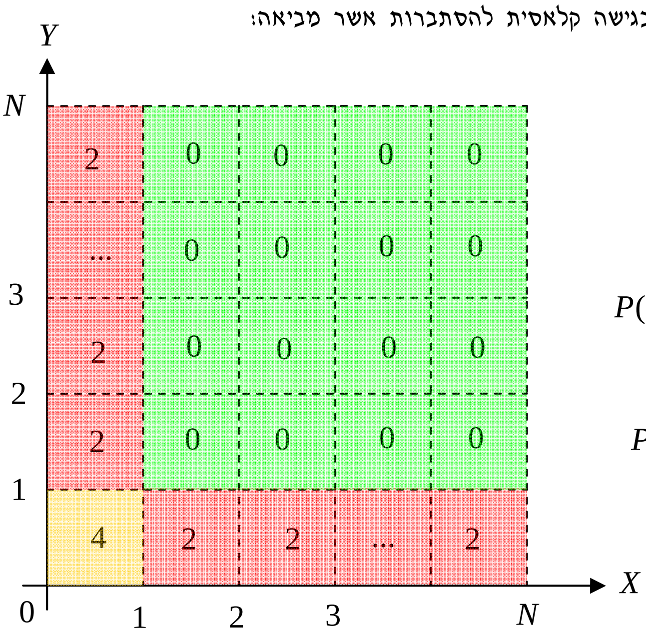
ד. $P(X\le 10)=F(10)=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$.

ה. תוחלת $E[X]=\frac{252}{36}=7$, שונות $Var[X]=\frac{1974}{36}-7^2=\frac{35}{6}$.

שאלה H4.3

א. ניתן לראות כי אם נחלק את כל האזור $-N\le X_0\le N$ ו—$-N\le Y_0\le N$ לריבועים בעלי צלעות בגודל 1, אפשר למיין אותם לשלוש קבוצות. אם מטבע נופל כך שמרכזו נמצא בריבוע צהוב, מספר החיתוכים בין שפתו לצירים X ו— Y הוא $M=4$. עבור הריבועים האדומים, $M=2$. עבור הריבועים הירוקים, $M=0$.

כיוון שמטבע נופל באחידות, מותר להשתמש בגישה קלאסית להסתברות אשר מביאה:



$$P(M=4)=\frac{4\cdot 1}{4\cdot N^2}=\frac{1}{N^2}$$

$$P(M=2)=\frac{4\cdot 2(N-1)}{4\cdot N^2}=\frac{2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$$

$$P(M=0)=\frac{4\cdot (N-1)^2}{4\cdot N^2}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^2$$

ב. בדיקת נרמול:

$$\sum_m P_M(m)=\left(\frac{1}{N}\right)^2+2\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\left(1-\frac{1}{N}\right)^2=\left[\frac{1}{N}+\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]^2=1$$

ג. חישוב התוחלת:

$$E[M]=\sum_m mP_M(m)=4\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^2+2\cdot 2\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)+0\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^2=\frac{4}{N}$$

חישוב השונות: $\mathrm{var}[M]=E\left[M^2\right]-\left(E[M]\right)^2$. כאן:

$$E\left[M^2\right]=\sum_m m^2P_M(m)=16\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^2+4\cdot 2\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)+0\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^2=\frac{8(N+1)}{N^2}$$

כך ש—

$$\mathrm{var}[M]=\frac{8(N-1)}{N^2}.$$

ד. יש לחשב את ההסתברות המותנית

$$P\left(X_0\ge 1/M=2\right)=\frac{P\left(X_0\ge 1\cap M=2\right)}{P\left(M=2\right)}=\frac{\left|\left\{X_0\ge 1\right\}\cap\left\{M=2\right\}\right|}{\left|\left\{M=2\right\}\right|}=\frac{2(N-1)}{8(N-1)}=\frac{1}{4}$$

שאלה H4.4

נתחיל מהגדרה,

$$E[X^3]=\sum_{k=1}^{n}k^3P(X=k).$$

נשתמש בנוסחאות מהערה

$$\sum_{j=1}^{k}j=\frac{k(k+1)}{2} \quad \text{ו—} \quad \sum_{j=1}^{k}j^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

כדי לראות כי

$$k^2=2\sum_{j=1}^{k}j-k \quad \text{ו—} \quad k^3=3\sum_{j=1}^{k}j^2-\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k.$$

כתוצאה,

$$k^3=3\sum_{j=1}^{k}j^2-\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k=3\sum_{j=1}^{k}j^2-3\sum_{j=1}^{k}j+k=\sum_{j=1}^{k}(3j^2-3j+1)$$

נציב את הנוסחה האחרונה בתוך הנוסחה הראשונה:

$$E[X^3]=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}(3j^2-3j+1)\right)P(X=k)$$

ונחליף מקומות של הסכומים:

$$E[X^3]=\sum_{j=1}^{n}(3j^2-3j+1)\underbrace{\sum_{k=j}^{n}P(X=k)}_{P(X\geq j)}=\sum_{j=1}^{n}(3j^2-3j+1)P(X\geq j).$$

סוף ההוכחה.

שאלה H4.5

שאלה זו היא "מבוא" לקורס 2006/2007.

א. קיימת רק אופציה אחת המתאימה לסכום התוצאות השווה ל-1: $P_{[1]}=\frac{1}{6}$ כך ש—

$$P(\Sigma=1)=\frac{1}{6}.$$

ב. עבור $P(\Sigma=2)$ האופציות הן

- $\{2\}$ ו—
- $\{1,1\}$

כך ש—

$$P(\Sigma=2)=P_{[2]}+P_{[1,1]}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{6^2}.$$

ג. עבור $P(\Sigma=3)$ האופציות הן

- $\{3\}$,
- $\{1,2\}$, $\{2,1\}$ ו—
- $\{1,1,1\}$

כך ש—

$$P(\Sigma=3)=P_{[3]}+P_{[1,2]}+P_{[2,1]}+P_{[1,1,1]}=\frac{1}{6}+2\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7^2}{6^3}.$$

ד. עבור $P(\Sigma=4)$ האופציות הן

- $\{4\}$,
- $\{1,3\}$, $\{3,1\}$, $\{2,2\}$,
- $\{2,1,1\}$, $\{1,2,1\}$, $\{1,1,2\}$ ו—
- $\{1,1,1,1\}$

כך ש—

$$P(\Sigma=4)=P_{[4]}+P_{[1,3]}+P_{[3,1]}+P_{[2,2]}+P_{[2,1,1]}+P_{[1,2,1]}+P_{[1,1,2]}+P_{[1,1,1,1]}$$
$$=\frac{1}{6}+3\frac{1}{6^2}+3\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^3=\frac{7^3}{6^4}.$$

ה. עבור $P(\Sigma=5)$ האופציות הן

- $\{5\}$,
- $\{1,4\}$, $\{4,1\}$, $\{3,2\}$, $\{2,3\}$,
- $\{1,1,3\}$, $\{1,3,1\}$, $\{3,1,1\}$, $\{2,2,1\}$, $\{2,1,2\}$, $\{1,2,2\}$,
- $\{2,1,1,1\}$, $\{1,2,1,1\}$, $\{1,1,2,1\}$, $\{1,1,1,2\}$ ו—
- $\{1,1,1,1,1\}$.

כך ש—

$$\begin{aligned}P(\Sigma=5) &= P_{[5]}+P_{[1,4]}+P_{[4,1]}+P_{[3,2]}+P_{[2,3]}\\ &+P_{[1,1,3]}+P_{[1,3,1]}+P_{[3,1,1]}+P_{[2,2,1]}+P_{[2,1,2]}+P_{[1,2,2]}\\ &+P_{[2,1,1,1]}+P_{[1,2,1,1]}+P_{[1,1,2,1]}+P_{[1,1,1,2]}\\ &+P_{[1,1,1,1,1]}\\ &=\frac{1}{6}+4\frac{1}{6^2}+6\frac{1}{6^3}+4\frac{1}{6^4}+\frac{1}{6^5}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^4=\frac{7^4}{6^5}.\end{aligned}$$

ו. חישוב בסעיפים הקודמים מביא לנחוש ברור

$$P(\Sigma=n)=\frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}.$$

כדי לבדוק את התאמתו לאקסיומות של קולמוגורוב, בואו נבדוק האם $0\le P(\Sigma=n)\le 1$. מהמשוואה

$$\frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}\le 1$$

נובע כי $0\le P(\Sigma=n)\le 1$ רק עבור

$$n\le 1+\frac{\ln 6}{\ln 7-\ln 6}\approx 12.6.$$

במילים אחרות, $P(\Sigma=n)>1$ עבור $n\ge 13$ כך שהניחוש לא יכול להיות נכון.

שאלה H4.6

נתחיל מצד ימין של השוויון ונשתמש בתכונות התוחלת על מנת להגיע ל—

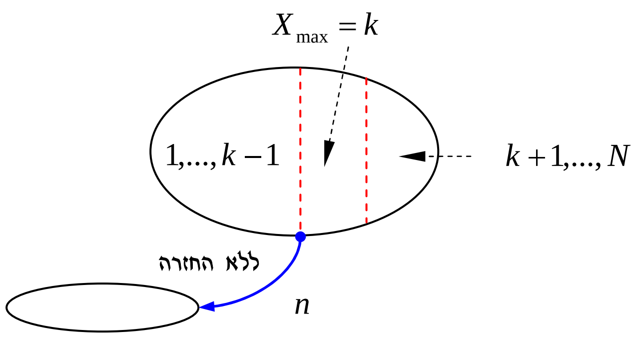
$$\frac{1+E[(-1)^X]}{2}=E\left[\frac{1+(-1)^X}{2}\right]=\sum_x\frac{1+(-1)^x}{2}P(X=x)=\sum_{x\in even}P(X=x)=P(X=\text{even})$$

סוף ההוכחה.

שאלה H4.7

א. ברור כי הערכים האפשריים של $X_{\max}$ נמצאים בתווך $n\le x_{\max}\le N$.

ב. כדי למצוא את התוחלת $E[X_{\max}]$ עלינו לדעת את פונקצית ההסתברות של $X_{\max}$. אותה אפשר לחשב באמצעות גישה קלאסית להסתברות:



$$P(X_{\max}=k)=\frac{|X_{\max}=k|}{|\Omega|}.$$

כאן, גודל של מרחב המדגם הוא

$$|\Omega| = C_N^n.$$

גודל המאורע $|X_{\max}=k|$ הוא מספר האופציות להגיע ל— $X_{\max}=k$:

$$|X_{\max}=k| = C_{k-1}^{n-1}C_1^1C_{N-k}^0 = C_{k-1}^{n-1}.$$

כתוצאה,

$$P(X_{\max}=k)=\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}.$$

<u>חישוב התוחלת</u>:

$$E[X_{\max}] = \sum_{x_{\max}} x_{\max}P_X(x_{\max}) = \sum_{k=n}^{N} kP_X(X_{\max}=k) = \frac{1}{C_N^n}\sum_{k=n}^{N} kC_{k-1}^{n-1}.$$

על מנת לחשב את הסכום $S(n,N)=\sum_{k=n}^{N} kC_{k-1}^{n-1}$, נשתמש בנוסחא שאותה הוכחנו בשאלה H3.1-(ב):

$$kC_{k-1}^{n-1} = nC_k^n$$

כדי לרשום: $S(n,N)=\sum_{k=n}^{N} kC_{k-1}^{n-1} = n\sum_{k=n}^{N} C_k^n$. עכשיו, הנוסחא משאלה H3.3 מביאה:

$$S(n,N) = n\underbrace{\sum_{k=n}^{N} C_k^n}_{C_{N+1}^{n+1}} = nC_{N+1}^{n+1}.$$

כתוצאה,

$$E[X_{\max}] = \frac{1}{C_N^n}\sum_{k=n}^{N} kC_{k-1}^{n-1} = \frac{S(n,N)}{C_N^n} = n\frac{C_{N+1}^{n+1}}{C_N^n} = n\frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!}\,\frac{n!(N-n)!}{N!}$$

$$= \frac{n}{n+1}(N+1).$$