PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

■ דף פתרונות לשאלות בית 3

■

שאלה H3.1

א.

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!k(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{(n-k)k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} nC_{n-1}^{k-1} &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= k\frac{n!}{k!(n-k)!}=kC_n^k \end{aligned}$$

שאלה H3.2

על מנת להוכיח את הנוסחא

$$C_k^j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}dz\; e^{-izj}\left(1+e^{iz}\right)^k$$

נתבונן בצד ימין של השוויון ונשתמש בבינום של ניוטון עבור

$$\left(1+e^{iz}\right)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m 1^{k-m}e^{izm}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m e^{izm}.$$

כתוצאה,

$$\int_{-\pi}^{+\pi}dz\; e^{-izj}\left(1+e^{iz}\right)^k=\sum_{m=0}^{k}C_k^m\int_{-\pi}^{+\pi}dz\; e^{-izj}e^{izm}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m\int_{-\pi}^{+\pi}dz\; e^{iz(m-j)}.$$

חישוב ישיר מביא:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{iz(m-j)} = \begin{cases} 2\pi, & m=j \\ 0, & m\neq j \end{cases} = 2\pi\cdot\delta_{m,j}.$$

כאן, הפונקציה

$$\delta_{m,j} = \begin{cases} 1, & m=j \\ 0, & m\neq j \end{cases}$$

מסמנת את הפונקציה של קרואונקר (Kronecker) כך ש—

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-izj}\left(1+e^{iz}\right)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m \cdot \delta_{m,j} = C_k^j.$$

סוף הוכחה.

שאלה H3.3

נתבונן בסכום $\sum_{j=m}^{M} C_j^m$ ונשתמש בנוסחה האינטגרלית

$$C_j^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-izm}\left(1+e^{iz}\right)^j \qquad (*)$$

מהשאלה הקודמת כדי לכתוב:

$$\sum_{j=m}^{M} C_j^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-izm}\sum_{j=m}^{M}\left(1+e^{iz}\right)^j.$$

בשלב הבא, נבצע את הסכום על j (סדרה הנדסית סופית):

$$\sum_{j=m}^{M}\left(1+e^{iz}\right)^j = \frac{\left(1+e^{iz}\right)^m}{1-\left(1+e^{iz}\right)}\left[1-\left(1+e^{iz}\right)^{M-m+1}\right] = e^{-iz}\left[\left(1+e^{iz}\right)^{M+1}-\left(1+e^{iz}\right)^m\right].$$

כתוצאה,

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{M} C_j^m &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-iz(m+1)}\left[\left(1+e^{iz}\right)^{M+1}-\left(1+e^{iz}\right)^m\right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-iz(m+1)}\left(1+e^{iz}\right)^{M+1}}_{C_{M+1}^{m+1}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-iz(m+1)}\left(1+e^{iz}\right)^{m}}_{0}\end{aligned}$$

על פי הנוסחה (*), מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-iz(m+1)}\left(1+e^{iz}\right)^{M+1} = C_{M+1}^{m+1},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} dz\, e^{-iz(m+1)}\left(1+e^{iz}\right)^{m} = C_m^{m+1} = \frac{m!}{(m+1)!(-1)!} = 0.$$

אפס בנוסחה האחרונה מתקבל כי $(-1)! = \infty$. אזי, אנחנו מגיעים לנוסחא $\sum_{j=m}^{M} C_j^m = C_{M+1}^{m+1}$.

סוף הוכחה.

שאלה H3.4

$$(a_1+a_2+a_3)^5 = \left(\sum_{j=1}^{3} a_j\right)^5 = \sum_{\substack{j_1=0,j_2=0,j_3=0\\ j_1+j_2+j_3=5}}^{5} P_3(j_1,j_2,j_3)\; a_1^{j_1}a_2^{j_2}a_3^{j_3} =$$

$$= \sum_{\substack{j_1=0,j_2=0,j_3=0\\ j_1+j_2+j_3=5}}^{3} \frac{5!}{j_1!\,j_2!\,j_3!}\; a_1^{j_1}a_2^{j_2}a_3^{j_3}$$

$$= \frac{5!}{0!0!5!}\; a_1^0a_2^0a_3^5 + \frac{5!}{0!1!4!}\; a_1^0a_2^1a_3^4 + \frac{5!}{0!2!3!}\; a_1^0a_2^2a_3^3$$

$$+ \frac{5!}{0!3!2!}\; a_1^0a_2^3a_3^2 + \frac{5!}{0!4!1!}\; a_1^0a_2^4a_3^1 + \frac{5!}{0!5!0!}\; a_1^0a_2^5a_3^0$$

$$+ \frac{5!}{1!0!4!} a_1^1a_2^0a_3^4 + \frac{5!}{1!1!3!} a_1^1a_2^1a_3^3 + \frac{5!}{1!2!2!} a_1^1a_2^2a_3^2$$

$$+ \frac{5!}{1!3!1!} a_1^1a_2^3a_3^1 + \frac{5!}{1!4!0!} a_1^1a_2^4a_3^0 + \frac{5!}{2!0!3!} a_1^2a_2^0a_3^3$$

$$+ \frac{5!}{2!1!2!} a_1^2a_2^1a_3^2 + \frac{5!}{2!2!1!} a_1^2a_2^2a_3^1 + \frac{5!}{2!3!0!} a_1^2a_2^3a_3^0$$

$$+ \frac{5!}{3!0!2!} a_1^3a_2^0a_3^2 + \frac{5!}{3!1!1!} a_1^3a_2^1a_3^1 + \frac{5!}{3!2!0!} a_1^3a_2^2a_3^0$$

$$+ \frac{5!}{4!0!1!} a_1^4a_2^0a_3^1 + \frac{5!}{4!1!0!} a_1^4a_2^1a_3^0 + \frac{5!}{5!0!0!} a_1^5a_2^0a_3^0$$

שאלה H3.5

משתמשים בעקרון הכפל כדי להגיע לתשובה: $\underbrace{26\cdot 26}_{\text{אותיות}}\cdot\underbrace{10\cdot 10\cdot 10}_{\text{ספרות}} = 676000$.

שאלה H3.6

מדובר על מספר תמורות של 10 איברים כאשר לא כל האיברים שונים: $P_{10}(5,2,3) = 2520$.

שאלה H3.7

מדובר על בחירה של 3 איברים מתוך 5 כאשר הבחירה היא <u>ללא החזרה</u> (3 אותיות <u>שונות</u>) <u>ועם חשיבות לסדר</u>.

אזי התשובה ניתנת על ידי מספר חליפות $P_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = 60$.

שאלה H3.8

<u>דרך א</u>: מדובר על <u>בחירה ללא החזרה ועם חשיבות לסדר</u>. מספר אופציות לבחור 4 איברים מתוך 6 הוא $P_6^4 = 360$. מכיוון שהמספר לא יכול לכלול אפס במקום הראשון משמאל, צריכים להוריד מ–$P_6^4 = 360$ את מספר האופציות עבור הרכבת ה"מספר" עם אפס בתחילה. המספר הזה שווה ל–$P_5^3 = 60$. אזי התשובה הסופית היא $P_6^4 - P_5^3 = 300$.

דרך ב: בדרך זו נשתמש בעקרון הכפל. את המקום הראשון משמאל אפשר למלא ב—5 אופנים (כי אסור להשתמש באפס). את המקום השני אפשר למלא ב—5 אופנים (על ידי ה—5 הספרות שנשארו). עבור המקום השלישי ישנן 4 אופציות, ולמקום האחרון – 3 אופציות. אזי, מגיעים לתשובה: $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3=300$.

שאלה H3.9

צריכים למלא 32 תאים כאשר קיימות 2 אופציות למלא כל תא על ידי 0 או 1. אזי, התשובה היא 2^{32}.

שאלה H3.10

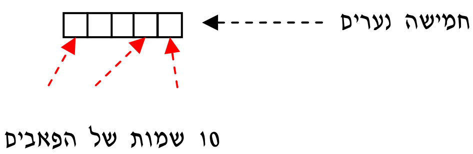
לא מדובר על כך שבוועד ישנם תפקידים מוגדרים. אזי, זו בחירה ללא חשיבות לסדר. גם ברור שהבחירה היא ללא החזרה. אזי משתמשים בצירופים כדי להגיע לתשובות הבאות:

א. $C_{30}^{3}=4060$.

ב. $C_{30}^{27}=4060$.

שאלה H3.11

מכיוון שחייבים לחשב הסתברות, נתחיל מחישוב של גודל מרחב המדגם.



ישנם 10 אופציות למלא כל אחד מחמישה תאים. אזי, $|\Omega|=10^5$.

א. אם כל הנערים התרכזו בשני הפאבים בשמות "באכחוס" (A) ו"רוק כבד" (B), אנו צריכים למלא חמישה תאי הנערים על ידי 2 שמות הפאבים הנ"ל. קיימות 2^5 אופציות כאלה. בתוכם ישנן 2 אופציות – $AAAAA$ ו—$BBBBB$ המתאימות לכך שכל חמישה הנערים התרכזו בפאב אחד. אזי, אנו חייבים להוריד שתי אופציות אלו מ—2^5 כך שההסתברות תהיה שווה ל—$\frac{2^5-2}{10^5}$.

ב. בסעיף זה שמות של שני פאבים לא נתונות. אזי, על פי עקרון הכפל, יש להכפיל את מספר האופציות (2^5-2) בסעיף א' במספר אופציות לבחור 2 פאבים מסוימים מתוך 10 כאשר סדר הבחירה לא חשוב והבחירה היא ללא החזרה. מספר אופציות כאלה שווה ל—C_{10}^{2}. אזי, התשובה הסופית עבור ההסתברות היא $C_{10}^{2}\cdot\frac{2^5-2}{10^5}$.

שאלה H3.12

נתייחס להרכבת מספר הרישוי כלניסוי תלת שלבי. בשלב הראשון נמלא את התא השמאלי באמצעות אחת מהאותיות הלועזיות. קיימות 26 אופציות כאלו. בשלב השני, נמלא חמישה תאים באמצעות הספרות המסודרות

בסדר יורד. קיימות $\frac{P_{10}^5}{5!}$ אופציות לעשות זאת. בשלב השלישי, נמלא את שני התאים הראשונים בצד שמאל על ידי שתי אותיות. מספר אופנים עבור זה שווה ל— 25^2. על פי עקרון הכפל, מקבלים: $25^2 \cdot \frac{P_{10}^5}{5!} \cdot 26$.

שאלה H3.13

הרכבת המספר הוא ניסוי דו שלבי.

- בשלב הראשון יש למלא 4 תאים משמאל באמצעות הספרות הזוגיות המסודרות בסדר יורד. מספר האופציות למלא את התאים האלה שווה ל— $\frac{P_5^4}{4!} = 5$ (כאן $4!$ במחנה לוקח בחשבון סדר עולה).
- מספר האופציות עבור השלב השני מחושב באותו הסגנון: הוא שווה ל— $\frac{P_5^3}{3!} = 10$.
- על פי עיקרון הכפל, מספר האופציות הכולל להרכיב מספר בעל תכונות מוגדרות בשאלה שווה לכפל בין מספר האופציות בכל שלב:

$$\frac{P_5^4}{4!}\frac{P_5^3}{3!} = 5 \cdot 10 = 50.$$

שאלה H3.14

שאלה זו היא הכללה של השאלה C3.1(ב).

א. אם אין חובה להשתמש בכל ספרה, מספר האופציות להרכבת מספר הוא 3^n. במידה וחלה חובה להשתמש בכל ספרה, יש להקטין את מספר האופציות 3^n במספר המספרים בעלי התבניות:

$\underbrace{1....1}_n$, $\underbrace{2....2}_n$, $\underbrace{3....3}_n$	$\leftarrow$	3 אופציות
$\underbrace{...1...2....}_n$ (מספר שאינו מכיל ספרה 3 אך מכיל 1 ו—2)	$\leftarrow$	$2^n - 2$ אופציות (ראה/י H3.11)
$\underbrace{...1...3....}_n$ (מספר שאינו מכיל ספרה 2 אך מכיל 1 ו—3)	$\leftarrow$	$2^n - 2$ אופציות (ראה/י H3.11)
$\underbrace{...2...3....}_n$ (מספר שאינו מכיל ספרה 1 אך מכיל 2 ו—3)	$\leftarrow$	$2^n - 2$ אופציות (ראה/י H3.11)

סך הכל: $3 + 3(2^n - 2) = 3(2^n - 1)$

כתוצאה, התשובה היא $3^n - 3(2^n - 1)$.

ב. עבור $n = 1$ זה מביא $3^1 - 3(2^1 - 1) = 0$ כצפוי; עבור $n = 2$ זה מביא $3^2 - 3(2^2 - 1) = 0$ כצפוי; עבור $n = 3$ זה מביא $3^3 - 3(2^3 - 1) = 6$ כצפוי.