PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

■ דף פתרונות לשאלות בית 2

2.1 הסתברות מותנית, שלמה ונוסחת בייס
2.2 מעגלים חשמליים – שני סוגים

■

שאלה H2.1

א. נסמן ב— A את המאורע {"6" בקובייה הראשונה} וב— B את המאורע {סכום 10 לפחות בהטלת שתי קוביות}. צריך לחשב $P(B/A)$. על פי נוסחא להסתברות מותנית $P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$. מכיוון ש— $A=\{61,62,63,64,65,66\}$ ו— $B=\{46,55,56,64,65,66\}$, רואים כי $B\cap A=\{64,65,66\}$ כך ש— $P(B\cap A)=\dfrac{|B\cap A|}{|\Omega|}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$ ו— $P(B)=\dfrac{|B|}{|\Omega|}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

כתוצאה,

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1/12}{1/6}=\frac{1}{2}.$$

ב. $P(B/A)=\dfrac{2}{3}$.

שאלה H2.2

א. נגדיר את המאורעות הבאים: A = {טיסה תצא בזמן} ו— B = {טיסה תגיע בזמן}. אזי נתון כי $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$ ו— $P(A\cap B)=p_3$. ההסתברות הדרושה היא הסתברות מותנית $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{p_3}{p_1}$. לא משתמשים בנתון $P(B)=p_2$.

ב. ההגבלות: ברור כי $0\le p_1,p_2,p_3\le 1$. כמו כן, ו— $p_3\le p_1$ (זה נובע מי הנוסחא $P(B/A)=p_3/p_1$) וגם $p_3\le p_2$ (זה נובע מי הנוסחא $P(A/B)=p_3/p_2$).

שאלה H2.3

נגדיר את המאורעות הבאים: A = {מוצר מיוצר במכונה A}, B = {מוצר מיוצר במכונה B} ו— C = {המוצר הנבחר פגום}. נתון כי $P(A)=0.1$, $P(B)=0.9$, $P(C/A)=0.01$ ו— $P(C/B)=0.05$.

א. על פי נוסחא להסתברות שלמה, $P(C)=P(C/A)P(A)+P(C/B)P(B)\approx 0.046$.

ב. על פי משפט בייס, $P(A/C)=\dfrac{P(C/A)P(A)}{P(C)}\approx 0.022$.

שאלה H2.4

נגדיר את המאורעות הבאים: A = {קיים אות ביציאה}, S_k = {המפסק מס' ה— k סגור} (עבור $k=1,2,\ldots,n$). ההסתברות הדרושה היא $P(\bar{S}_1/A)$. על פי משפט בייס,

$$P(\bar{S}_1/A)=\frac{P(A/\bar{S}_1)P(\bar{S}_1)}{P(A)}=(1-p)\frac{P(A/\bar{S}_1)}{P(A)}.$$

ההסתברות שמעגל כולו פועל היא

$$P(A)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=1-P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}\right)=1-P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\bar{A}_k\right)=1-\prod_{k=1}^{n}P\left(\bar{A}_k\right)=1-(1-p)^n.$$

כדי לחשב את ההסתברות המותנית $P(A/\bar{S}_1)$ יש להבחין כי משמעות המאורע $A/\bar{S}_1$ היא {קיים אות יציאה כאשר ידוע כי המפסק מס' 1 פתוח}. זה מביא:

$$P(A/\bar{S}_1)=P\left(\bigcup_{k=2}^{n}A_k\right)=1-\prod_{k=2}^{n}P\left(\bar{A}_k\right)=1-(1-p)^{n-1}.$$

כתוצאה,

$$P(\bar{S}_1/A)=(1-p)\frac{P(A/\bar{S}_1)}{P(A)}=(1-p)\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}.$$

שאלה H2.5

נתון כי $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3}$ וגם $P(R/A)=\dfrac{1}{3}$, $P(R/B)=\dfrac{1}{4}$, $P(R/C)=\dfrac{1}{6}$. כאן, המאורע R = {מכונית רטובה מגשם}. ההסתברות הדרושה היא $P(C/R)$ אשר נתונה על ידי

$$P(C/R)=\frac{P(R/C)P(C)}{P(R)}=\frac{P(R/C)P(C)}{P(R/A)P(A)+P(R/B)P(B)+P(R/C)P(C)}=\frac{2}{9}.$$

שאלה H2.6

א. נגדיר את המאורעות הבאים: L = {סטודנט למד לפני המבחן}, R = {סטודנט ענה נכון לשאלה}. ההסתברות הדרושה היא

$$P(L/R)=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R)}=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R/L)P(L)+P(R/\bar{L})P(\bar{L})}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{m}\cdot(1-p)}$$

אזי,

$$P(L/R)=\frac{pm}{pm+(1-p)}.$$

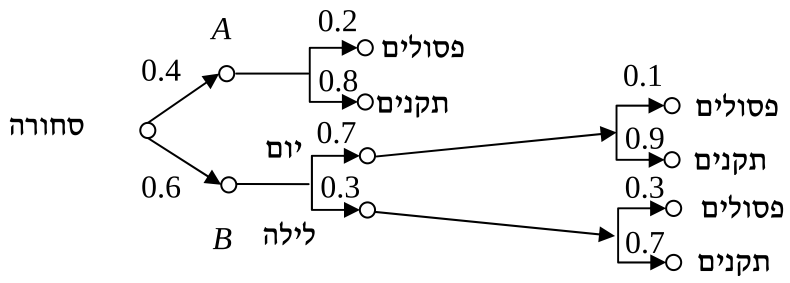
ב. עבור $m=1$ התשובה היא $P(L/R)\big|_{m=1}=p$. עבור $m\to\infty$ התשובה היא

$$\lim_{m\to\infty}P(L/R)=\lim_{m\to\infty}\frac{pm}{pm+(1-p)}=1.$$

(תן/י הסבר מילולי לתוצאות אלו!)

שאלה H2.7

נוח להיעזר בדיאגרמת עץ הבאה:



נגדיר את המאורעות הבאים:

A = {השבב מיוצר במפעל A}
B_1 = {השבב מיוצר במפעל B במשמרת יום}
B_2 = {השבב מיוצר במפעל B במשמרת לילה}
C = {השבב הנבחר פסול}

א.

$$P(C)=P(C/A)P(A)+P(C/B_1)P(B_1)+P(C/B_2)P(B_2)$$
$$=0.2\cdot 0.4+0.1\cdot(0.7\cdot 0.6)+0.3\cdot(0.6\cdot 0.3)\approx 0.176$$

ב.

$$P(A/C)=\frac{P(C/A)P(A)}{P(C)}=\frac{0.2\cdot 0.4}{0.176}\approx 0.45$$

ג.

$$P(B_1/C)=\frac{P(C/B_1)P(B_1)}{P(C)}=\frac{0.1\cdot(0.6\cdot 0.7)}{0.176}\approx 0.24$$

ד.

$$P(B_2/C)=\frac{P(C/B_2)P(B_2)}{P(C)}=\frac{0.3\cdot(0.3\cdot 0.6)}{0.176}\approx 0.31$$

שאלה H2.8

צייר את דיאגרמת עץ וודא כי התשובה היא $p\cdot p+(1-p)\cdot(1-p)=2p^2-2p+1$.

שאלה H2.9

בואו נתבונן במעגל א'. אם נסמן את היחידות העליונות כ—A, B ואת היחידות התחתונות כ—C ו—D, נוכל לבטא את ההסתברות שמעגל א' פועל כ—$P_1 = P((A \cap B) \cup (C \cap D))$. בהנחה שהיחידות פועלות ללא תלות ובהסתברויות זהות $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = p$, מקבלים:

$$\begin{aligned} P_1 &= P((A\cap B)\cup(C\cap D)) = P(A\cap B)+P(C\cap D)-P((A\cap B)\cap(C\cap D)) \\ &= P(A\cap B)+P(C\cap D)-P(A\cap B)P(C\cap D) \\ &= P(A)P(B)+P(C)P(D)-P(A)P(B)P(C)P(D) = 2p^2-p^4 \end{aligned}$$

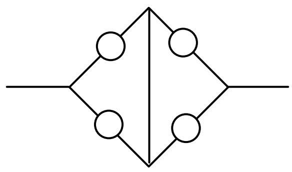
כיוון ש—$P_1 = 2p^2 - p^4 = \frac{5}{9}$, מגיעים למסקנה ש—

$$p = \sqrt{1-\sqrt{1-P_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

נתבונן במעגל ב' המורכב משני תת-מעגלים המחוברים בתור. אם נסמן את ההסתברות שכל אחד מהם פועל כ—$\tilde{P}$, ההסתברות שמעגל כולו יפעל תהיה $P_2 = \tilde{P}^2$. כדי למצוא את $\tilde{P}$, נשתמש בנוסחא להסתברות שלמה:

$$\tilde{P} = P_1 \cdot (1-p) + P_3 \cdot p = \frac{5}{9} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) + P_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

כאשר P_3 היא ההסתברות שהמעגל



פועל. חישוב פשוט מביא ש-

$$P_3 = P((A\cup C)\cap(B\cup D)) = P(A\cup C)P(B\cup D) = (2p-p^2)^2 = \frac{13-4\sqrt{3}}{9}.$$

שילוב הנוסחאות מביא:

$$\tilde{P} = \frac{5}{9}\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) + P_3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{9}\cdot(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{13-4\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+8\sqrt{3}}{27} \approx 0.624$$

וכתוצאה:

$$P_2 = \tilde{P}^2 = \left(\frac{3+8\sqrt{3}}{27}\right)^2 \approx 0.389.$$

שאלה H2.10

כדי להוכיח את הנוסחא, נתבונן ב-$P((A \cup B)/C)$. על פי נוסחא להסתברות מותנית,

$$P((A\cup B)/C)=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}.$$

על פי החוק הדיסטריבוטיבי, $P((A\cup B)\cap C)=P((A\cap C)\cup(B\cap C))$. חוק האיחוד מביא:

$$P((A\cap C)\cup(B\cap C))=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P\left(\underbrace{(A\cap C)\cap(B\cap C)}_{A\cap B\cap C}\right)$$
$$=P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C).$$

כך ש—

$$P((A\cup B)/C)=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}.$$

בשלב האחרון, משתמשים בנוסחא להסתברות מותנית:

$$P(A\cap C)=P(A/C)\cdot P(C),$$
$$P(B\cap C)=P(B/C)\cdot P(C),$$
$$P(A\cap B\cap C)=P((A\cap B)\cap C)=P((A\cap B)/C)\cdot P(C).$$

הצבה של זה בנוסחא הקודמת מביאה:

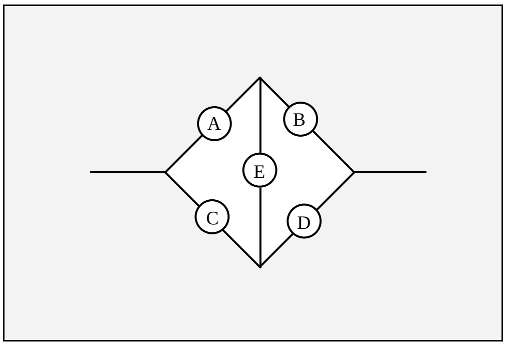
$$P((A\cup B)/C)=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$$
$$=\frac{P(A/C)\cdot P(C)+P(B/C)\cdot P(C)-P((A\cap B)/C)\cdot P(C)}{P(C)}$$
$$=P(A/C)+P(B/C)-P((A\cap B)/C).$$

סוף הוכחה.

שאלה H2.11

בחירתך	טענה
	$P(A\cap B)=P(A)+P(B)$
√	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
√	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$
	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
√	$P(A/B)=P(A)$
	$P(A/B)=P(A)/P(B)$

שאלה H2.12



שאלה H2.13

בחירתך	טענה
√	$P(A)=P(A\setminus B)+P(A)\cdot P(B)$
	$P(A\setminus B)=P(A)-P(B)$
√	$P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B\setminus A)+P(A)\cdot P(B)$
	$P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B\setminus A)-P(A)\cdot P(B)$
	$P(\overline{A\cap B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$

שאלה H2.14

$$P\left(\bar{A}/(A\cup\bar{B})\right)=\frac{(1-P(A))\cdot(1-P(B))}{P(A)+(1-P(A))\cdot(1-P(B))}.$$

שאלה H2.15

על פי נתוני השאלה, מרחב המדגם הוא $\Omega=\{"RR","BB","RB"\}$. ההסתברות הנשאלת היא הסתברות מותנית

$$P("B-down"/"R-up")=\frac{P("B-down"\cap"R-up")}{P("R-up")}=\frac{1}{2}\frac{P("RB")}{P("R-up")}.$$

על פי נתוני השאלה, $P("RB")=\frac{1}{3}$. לגבי $P("R-up")$ נשתמש במשפט להסתברות שלמה:

$$P("R-up")=P("R-up"/"RR")P("RR")+P("R-up"/"BB")P("BB")$$
$$+P("R-up"/"RB")P("RB")=1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

כתוצאה,

$$P(\text{"}B-down\text{"}/\text{"}R-up\text{"}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

שאלה H2.16

בחירתך	טענה
	אזי המאורעות $A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_n$ הם בהכרח מאורעות בלתי תלויים.
√	אזי מתקיים: $P(A_k / A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \dfrac{P(A_k)}{P(A_1)+\ldots+P(A_n)}$
√	אזי מתקיים: $P(\overline{A_k} / \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) = 1$
	אזי מתקיים: $P(A_k / \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}) = \dfrac{P(A_k)}{1-\left(P(A_1)+\ldots+P(A_n)\right)}$
	אזי מתקיים: $P(\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}) = 1 - P(A_1)P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$