PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנציפר

■ דף פתרונות לשאלות בית 1

■

שאלה H1.1

א. יהיה X_A – מספר המכתבים שקיבל דייר A. משמעות המאורע A_1: $X_A \ge 1$. אזי, משמעות המאורע $\bar{A}_1$ היא $X_A = 0$ כי הערכים האפשריים של X_A הם בין 0 ל—6. זאת אומרת, הדייר A קיבל 0 מכתבים.

ב. $B_3 \cap C_3$ = {B קיבל לפחות 3 מכתבים וגם C קיבל לפחות 3 מכתבים}. במילים אחרות, $X_B \ge 3$ וגם $X_C \ge 3$. כתוצאה, $X_B + X_C \ge 6$. האופציה היחידה עבור הדייר A היא $X_A = 0$. זאת אומרת, A קיבל 0 מכתבים.

ג. $\bar{B}_1 \cap \bar{C}_1 \cap \bar{D}_1$ = {B קיבל 0 מכתבים וגם C קיבל 0 מכתבים, וגם D קיבל 0 מכתבים (ראה/י סעיף א')}. זאת אומרת, A קיבל 6 מכתבים.

ד. $A_1 \cap B_1 \cap C_1 \cap D_1$ = {כל אחד קיבל לפחות מכתב אחד}. זאת אומרת, $X_A \ge 1$ וגם $X_B \ge 1$ וגם $X_C \ge 1$ וגם $X_D \ge 1$. כיוון ש—$X_A + X_B + X_C + X_D = 6$, מתקיים: $X_A = 6 - \underbrace{(X_B + X_C + X_D)}_{\ge 3} \le 3$. כתוצאה, $1 \le X_A \le 3$. זאת אומרת, A קיבל 1, 2 או 3 מכתבים.

ה. משמעות של המאורע $(B_3 \cup C_3)$ היא $X_B \ge 3$ או $X_C \ge 3$ או שניהם גדולים מ—3. במילים אחרות $X_B + X_C \ge 3$. אבל גם $X_D \ge 2$ (כי המאורע המלא הוא $(B_3 \cup C_3) \cap D_2$). אזי, $X_B + X_C + X_D \ge 5$ כך ש—$X_A = 6 - \underbrace{(X_B + X_C + X_D)}_{\ge 5} \le 1$. זאת אומרת, A קיבל מכתב אחד לכל היותר.

שאלה H1.2

א. נתחיל מהמאורע E_2. על פי החוק הדיסטריבוטיבי מתקיים:

$$(A \cap D) \cup (A \cap C) = A \cap (D \cup C) = A \cap (C \cup D)$$ ו—$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = B \cap (C \cup D).$$

אזי, $E_2 = \left(\underbrace{(C \cup D)}_{L} \cap B \right) \cup \left(\underbrace{(C \cup D)}_{L} \cap A \right)$. שימוש נוסף באותו החוק מביא:

$$E_2=(L\cap B)\cup(L\cap A)=L\cap(A\cup B)=(A\cup B)\cap L=(A\cup B)\cap(C\cup D).$$

ב. אפשר להדגים את שוויון $E_1=E_2$ באמצעות המעגל. מצד אחד, המאורע "מעגל כולו פועל" הוא $E_1=(A\cup B)\cap(C\cup D)$. מצד שני, ישנם ארבעה מסלולים לזרימת הזרם: $A\cap C$, $A\cap D$, $B\cap C$ ו-$B\cap D$ כך שהמאורע "מעגל כולו פועל" הוא

$$E_2=(A\cap D)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D).$$

כיוון שמדובר על אותו המעגל, $E_1=E_2$.

שאלה H1.3

א. $\Omega=\{\mathrm{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}\}$.

ב. $A=\{\mathrm{HHH, HHT, THH, THT}\}$; $P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

ג. $B=\{\mathrm{HTT, TTH, TTT}\}$; $A\cup B=\{\mathrm{HHH, HHT, THH, THT, HTT, TTH, TTT}\}$.

$$P(A\cup B)=\frac{|A\cup B|}{|\Omega|}=\frac{7}{8}.$$

שאלה H1.4

נוסחא להסתברות מותנית (הרצאה מס' 2):

$$P\left(\bar{A}/(A\cup B)\right)=\frac{P\left(\bar{A}\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}.$$

חוק האיחוד ואי תלות:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B).$$

חוק דיסטריבוטיבי:

$$P\left(\bar{A}\cap(A\cup B)\right)=P\left(\underbrace{(\bar{A}\cap A)}_{\varnothing}\cup(\bar{A}\cap B)\right)=P\left(\bar{A}\cap B\right).$$

שימוש בתוצאות השאלה C1.5:

$$P\left(\bar{A}\cap B\right)=(1-P(A))P(B).$$

סך הכל:

$$P\left(\bar{A}/(A\cup B)\right)=\frac{(1-P(A))P(B)}{P(A)+(1-P(A))P(B)}.$$

שאלה H1.5

סמן/י ב— $\surd$ את הטענות הנכונות:

סמן/י כאן:	טענה
(א) $\surd$	$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$
(ב) $\surd$	$A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B$
(ג)	$\overline{A}\cap B=A\cup B$
(ד) $\surd$	$\overline{(A\cup B)}\cap\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$
(ה) $\surd$	$(A\cap B)\cap(\overline{B}\cap C)=\varnothing$

שאלה H1.6

מרחב המדגם:

$$\Omega=\{$$
$$11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66$$
$$\}$$

A = "סכום התוצאות 10 לפחות" = $\{46,55,56,64,65,66\}$. אזי: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

שאלה 1.7

נגדיר את המאורע $A=$ {מעגל כולו פועל} ואת n המאורעות הבאים: $S_k=$ {המפתח ה- k סגור} עבור כל $k=1,\ldots,n$. המאורע המשלים $\overline{A}=\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\ldots\cap\overline{S}_{n-1}\cap\overline{S}_n$ (המעגל כולו אינו פועל). בגלל אי תלות של מאורעות S_k, מקבלים:

$$P(\overline{A})=P(\overline{S}_1)\cdot P(\overline{S}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{S}_{n-1})\cdot P(\overline{S}_n)=(1-p)^n.$$

אזי,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-p)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

על פי תנאי השאלה, זה שווה ל— $\frac{15}{16}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ כך ש— $n=4$.

שאלה H1.8

כדי להוכיח שהמאורעות $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ הם מאורעות בלתי תלויים, יש להראות כי $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$ כאשר נתון כי $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. נתחיל מחוק דה מורגן אשר אומר: $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$. על פי חוק המשלים, מגיעים ל—

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B).$$

משתמשים בחוק האיחוד וגם באי התלות של A ו-B:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)}.$$

מכאן מקבלים:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=\underbrace{[1-P(A)]}_{P(\overline{A})}\underbrace{[1-P(B)]}_{P(\overline{B})}.$$

סוף הוכחה.

שאלה H1.9

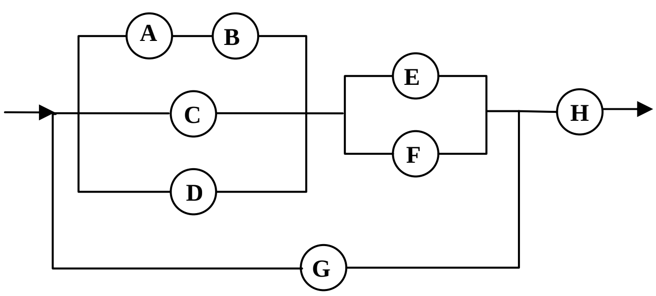
יהיה מאורע A_k = "תגובה חיובית של כותב ביקורת ה-k". אזי המאורה E = "רוב התגובות חיוביות" הוא

$$E=(A_1\cap A_2\cap A_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3)\cup(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)\cup(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3).$$

שימוש בחוקי ההסתברות מביא:

$$\begin{aligned}P(E)&=p_1p_2p_3+(1-p_1)p_2p_3+p_1(1-p_2)p_3+p_1p_2(1-p_3)\\&=p_1p_2+p_2p_3+p_1p_3-2p_1p_2p_3.\end{aligned}$$

שאלה 1.10



שאלה H1.11

א. חוק האיחוד מביא: $\underbrace{P(A\cup B)}_{c}=\underbrace{P(A)}_{a}+\underbrace{P(B)}_{b}-P(A\cap B)$ כך ש-$P(A\cap B)=a+b-c$.

ב. נתחיל מהזהות $A\cup\overline{A}=\Omega$ ונחשב $(A\cup\overline{A})\cap B=\Omega\cap B=B$.

חוק דיסטריבוטיבי: $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=B$.

חוק האיחוד:

$$P\big((A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)\big)$$
$$=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)-P(\underbrace{A\cap B\cap\bar{A}\cap B}_{A\cap\bar{A}\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing})$$
$$=P(B)$$

כתוצאה: $\underbrace{P(A\cap B)}_{a+b-c}+P(\bar{A}\cap B)=\underbrace{P(B)}_{b}$. זה מביא את התשובה: $P(\bar{A}\cap B)=c-a$.

ג. באותה הדרך אפשר להוכיח כי $P(A\cap\bar{B})=c-b$.

ד. חוק דה מורגאן: $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$. כתוצאה, מקבלים:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-\underbrace{P(A\cup B)}_{c}=1-c.$$

ה. חוק דה מורגאן: $\bar{A}\cup B=\overline{A\cap\bar{B}}$ כך ש—

$$P(\bar{A}\cup B)=P\left(\overline{A\cap\bar{B}}\right)=1-\underbrace{P(A\cap\bar{B})}_{c-b}=1-c+b.$$

ו. באותה הדרך אפשר להוכיח כי $P\big(A\cup\bar{B}\big)=1-c+a$.

ז. חוק דה מורגאן: $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$. כתוצאה, מקבלים:

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P\big(\overline{A\cap B}\big)=1-\underbrace{P(A\cap B)}_{a+b-c}=1+c-a-b.$$

שאלה H1.12

יש להשתמש בשיטה של השאלה הקודמת כדי לפתח את התשובות הבאות:

א. $P(A\cup B)=a+b-c$

ב. $P\big(\bar{A}\cup B\big)=1+c-a$

ג. $P\big(A\cap\bar{B}\big)=a-c$

ד. $P\big(\bar{A}\cap\bar{B}\big)=1+c-a-b$

ה. $P\big(\bar{A}\cap B\big)=b-c$

ו. $P\big(A\cup\bar{B}\big)=1-b+c$

ז. $P\big(\bar{A}\cup\bar{B}\big)=1-c$

שאלה H1.13

א. קיימת רק אופציה אחת המתאימה לסכום התוצאות השווה ל-1: $P_{[1]}=\frac{1}{6}$ כך ש—

$$P(\Sigma=1)=\frac{1}{6}.$$

ב. עבור $P(\Sigma=2)$ האופציות הן

- $\{2\}$ ו—
- $\{1,1\}$

כך ש—

$$P(\Sigma=2)=P_{[2]}+P_{[1,1]}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{6^2}.$$

ג. עבור $P(\Sigma=3)$ האופציות הן

- $\{3\}$,
- $\{1,2\}$, $\{2,1\}$ ו—
- $\{1,1,1\}$

כך ש—

$$P(\Sigma=3)=P_{[3]}+P_{[1,2]}+P_{[2,1]}+P_{[1,1,1]}=\frac{1}{6}+2\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{7^2}{6^3}.$$

ד. עבור $P(\Sigma=4)$ האופציות הן

- $\{4\}$,
- $\{1,3\}$, $\{3,1\}$, $\{2,2\}$,
- $\{2,1,1\}$, $\{1,2,1\}$, $\{1,1,2\}$ ו—
- $\{1,1,1,1\}$

כך ש—

$$\begin{aligned}P(\Sigma=4)&=P_{[4]}+P_{[1,3]}+P_{[3,1]}+P_{[2,2]}+P_{[2,1,1]}+P_{[1,2,1]}+P_{[1,1,2]}+P_{[1,1,1,1]}\\&=\frac{1}{6}+3\frac{1}{6^2}+3\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^3=\frac{7^3}{6^4}.\end{aligned}$$

ה. עבור $P(\Sigma=5)$ האופציות הן

- $\{5\}$,
- $\{1,4\}$, $\{4,1\}$, $\{3,2\}$, $\{2,3\}$,
- $\{1,1,3\}$, $\{1,3,1\}$, $\{3,1,1\}$, $\{2,2,1\}$, $\{2,1,2\}$, $\{1,2,2\}$,
- $\{2,1,1,1\}$, $\{1,2,1,1\}$, $\{1,1,2,1\}$, $\{1,1,1,2\}$ ו—
- $\{1,1,1,1,1\}$.

כך ש—

$$\begin{aligned}P(\Sigma=5)&=P_{[5]}+P_{[1,4]}+P_{[4,1]}+P_{[3,2]}+P_{[2,3]}\\&\quad+P_{[1,1,3]}+P_{[1,3,1]}+P_{[3,1,1]}+P_{[2,2,1]}+P_{[2,1,2]}+P_{[1,2,2]}\\&\quad+P_{[2,1,1,1]}+P_{[1,2,1,1]}+P_{[1,1,2,1]}+P_{[1,1,1,2]}\\&\quad+P_{[1,1,1,1,1]}\\&=\frac{1}{6}+4\frac{1}{6^2}+6\frac{1}{6^3}+4\frac{1}{6^4}+\frac{1}{6^5}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{6}\right)^4=\frac{7^4}{6^5}.\end{aligned}$$

ו. חישוב בסעיפים הקודמים מביא לנחוש ברור

$$P(\Sigma = n) = \frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}.$$

כדי לבדוק את התאמתו לאקסיומות של קולמוגורוב, בואו נבדוק האם $0 \le P(\Sigma = n) \le 1$.
מהמשוואה

$$\frac{1}{6}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} \le 1$$

נובע כי $0 \le P(\Sigma = n) \le 1$ רק עבור

$$n \le 1 + \frac{\ln 6}{\ln 7 - \ln 6} \approx 12.6.$$

במילים אחרות, $P(\Sigma = n) > 1$ עבור $n \ge 13$ כך שהניחוש לא יכול להיות נכון.

שאלה H1.14

צייר/י דיאגרמת וון!

בחירתך	הסתברות המאורע B
(א)	a_1
(ב) √	a_2
(ג)	$a_1 a_2 - (1 - a_1)$
(ד)	$a_1 + a_2 - (1 - a_2)$
(ה)	$a_2 - a_1$
(ו)	$a_2 + a_1$

שאלה H1.15

התשובה היא

$$p^k\left(p + p^{n-k} - p \cdot p^{n-k}\right) = p^{k+1} + p^n - p^{n+1}.$$