



# PROBABILITY AND STATISTICS

## הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנזיפר

© Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07 כל הזכויות שמורות 2006/07

### ■ דף שאלות בית 9

9.1 בעיות אמידה קשורות להתפלגות נורמלית

#### שאלה H9.1

הניסיון מראה כי אורך החיים (בשעות) של נורות מתוצרת מפעל מסוים מתפלג נורמלית ובעל סטיית תקן  $\sigma = 22$ . לאמידת התוחלת של אורך חיי הנורות נבדקו 16 נורות מקריות ונמצא שאורך החיים הממוצע שלהן הוא  $\bar{X} = 863$ .

- מצא/י רווח סמך ברמה של 90% לתוחלת  $\mu$ .
- ניח שבמדגם של 100 נורות התקבל  $\bar{X} = 868$ . מהו עתה רווח סמך ברמה של 90% עבור  $\mu$ ?
- מהו גודל המדגם  $n$  שיבטיח ברמה של 90% שהערך האמיתי של  $\mu$  אינו שונה ממוצע המדגם ביותר משעה אחת?
- מהו גודל המדגם שיבטיח שגיאת אמידה שלא תעלה על 2 שעות ברמת סמך של 95%?
- מהו גודל המדגם שיבטיח שגיאת אמידה שלא תעלה על 2 שעות ברמת סמך של 99%?

#### שאלה H9.2

נתבונן בשני מדגמים של תצפיות: המדגם  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  בעל  $n$  תצפיות ומדגם  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$  בעל  $k$  תצפיות. ממוצעי המדגמים הם  $\bar{X}_{(n)}$  ו- $\bar{Y}_{(k)}$  בהתאמה, ואומדני השונות הם  $\hat{S}_{(X,n)}^2$  ו- $\hat{S}_{(Y,k)}^2$  בהתאמה. נבנה מדגם "חדש"  $Z$  כאיחוד של שני המדגמים הקיימים:  $Z = \underbrace{\{X_1, X_2, \dots, X_n\}}_n, \underbrace{\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}}_k$ . מהם הממוצע  $\bar{Z}_{(n+k)}$  והאומדן לשונות  $\hat{S}_{(Z,n+k)}^2$  עבור המדגם ה"חדש"? נא לבטא את התשובות דרך הממוצעים  $\bar{X}_{(n)}$  ו- $\bar{Y}_{(k)}$  והאומדנים  $\hat{S}_{(X,n)}^2$  ו- $\hat{S}_{(Y,k)}^2$  בלבד.

#### שאלה H9.3

ידוע כי רווח הסמך לתוחלת  $\mu_X$  ברמת סמך  $1 - \alpha$  נתון על ידי הנוסחה

$$\bar{X}_{(n)} - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} < \mu_X < \bar{X}_{(n)} + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$$

התצפיות  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  עבור משתנה מקרי  $X$  מפולגות נורמלית עם  $\text{var}[X] = \sigma_X^2$ . ישנם מדגם נוסף  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$  עבור משתנה מקרי אחר  $Y$  המפולג נורמלית עם  $\text{var}[Y] = \sigma_Y^2$ . עבור רמת סמך  $1 - \alpha$ , מצא/י את רווחי הסמך עבור

א. הפרש התוחלות  $\mu_X - \mu_Y$

ב. סכום התוחלות  $\mu_X + \mu_Y$

## ■ מפתח לשאלות

א.  $854 < \mu < 871.6$ ; ב.  $864.4 < \mu < 871.6$ ; ג.  $1310$ ; ד.  $465$ ; ה.  $0.803$  שאלה H9.1

$$\bar{Z}_{(n+k)} = \frac{1}{n+k} (n\bar{X}_{(n)} + k\bar{Y}_{(k)})$$
שאלה H9.2

$$\hat{S}_{(Z,n+k)}^2 = \frac{1}{n+k-1} \left[ (n-1)\hat{S}_{(X,n)}^2 + (k-1)\hat{S}_{(Y,k)}^2 + \frac{nk}{n+k} (\bar{X}_{(n)} - \bar{Y}_{(k)})^2 \right]$$

$$\bar{X}_{(n)} \mp \bar{Y}_{(m)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \leq \mu_X \mp \mu_Y \leq \bar{X}_{(n)} \mp \bar{Y}_{(m)} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}$$
שאלה H9.3

