



PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

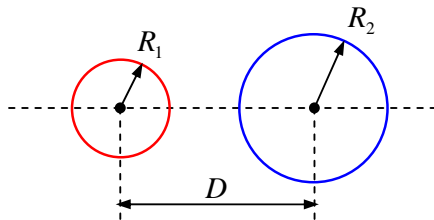
מאת יוג'ין קנזיפר

© Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07 כל הזכויות שמורות 2006/07

דף שאלות בית ד

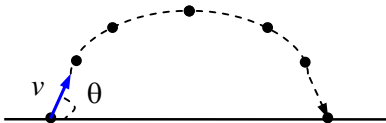
7.1 משתנה מקרי רציף
7.2 התפלגויות רציפות מיוחדות

שאלה H7.1



שני מעגלים בעלי רדיוסים R_1 ו- R_2 נמצאים במרחק אחד מהשני כמפורט בציור. בהנחה שהרדיוסים R_1 ו- R_2 הם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה $R_1 \sim U(0, R)$ ו- $R_2 \sim U(0, R)$, מצא/י את ההסתברות לכך ששני המעגלים נמצאים אחד בתוך השני.

שאלה H7.2



תותח יורה פגז במהירות התחלתית v בזווית θ כמפורט בציור. בהנחה כי זווית הירי θ היא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה,

$$\theta \sim U\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ מצא/י}$$

א. את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_{T_f}(t)$ של זמן

מעוף הפגז T_f .

ב. את פונקציית הצפיפות $f_{T_f}(t)$ של זמן מעוף הפגז T_f . וודא/י כי הנרמול עבור $f_{T_f}(t)$

מתקיים.

ג. את התוחלת $E[T_f]$.

הערה: זמן מעוף הפגז שיוורה במהירות התחלתית v בזווית θ ניתן על ידי הנוסחה $T_f = \frac{2v}{g} \sin(\theta)$. כאן, g

הוא תאוצת הכובד.

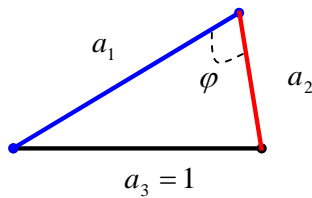
שאלה H7.3

נתון כי השורשים x_1 ו- x_2 של משוואה ריבועית $x^2 + ax + b = 0$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה $x_1 \sim U(-1, 1)$ ו- $x_2 \sim U(0, 1)$ בהתאמה.

א. מצא/י את ההסתברות שהמקדם a גדול מהמקדם b .

ב. אם ידוע כי המקדם $a > -1$, מהי ההסתברות שהמקדם b חיובי, $b > 0$?

שאלה H7.4



יהיו a_1 ו- a_2 שני משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים, בעלי התפלגות אחידה: $a_1 \sim U(0,1)$ ו- $a_2 \sim U(0,1)$.

- א. מהי ההסתברות לבניית משולש אשר יהיה בעל צלעות בגודל a_1 , a_2 ו- $a_3 = 1$?
- ב. בהנחה שהמשולש נוצר, מהי ההסתברות שהזווית φ (ראה/י ציור) נמצאת בין 0 ל-90 מעלות?

הערה: היעזרו/י בנוסחה $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \varphi$.

שאלה H7.5

יהיה X משתנה מקרי רציף המתואר על ידי פונקציית צפיפות אשר שונה מ-0 בתחום מסוים ובו ניתנת על ידי הנוסחה $f_X(x) = c(x^2 + |x|)$. הפרמטר c אינו ידוע.

- א. מהו התחום בו פונקציית הצפיפות שונה מ-0 אם ידוע שהתוחלת $E[X] = 0$ אך $E[|X|] = 1$?
- ב. מצאו את הפרמטר c .
- ג. חשבו את פונקציית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$ ושרטטו אותה.
- ד. מצאו את ההסתברות $P(|X| < c)$.

שאלה H7.6

פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה מקרי רציף X נתונה על ידי הנוסחה

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ at^2 - bt, & 0 \leq t < 1 \\ ct, & 1 \leq t < 2 \\ d, & t \geq 2 \end{cases}$$

- א. חשבו את המקדמים c ו- d ואת התחום המותר של הפרמטרים a ו- b עבורם $F_X(t)$ היא אמנם פונקציית התפלגות מצטברת.
- ב. בהנחה כי $a = \frac{1}{4}$ ו- $b = -\frac{1}{4}$,
- ב-1: שרטטו את הפונקציה $F_X(t)$.
- ב-2: מצאו את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\text{var}[X]$ של המשתנה המקרי X .
- ב-3: חשבו את ההסתברות המותנית $P(|X| < 2 \mid X > 1)$?

שאלה H7.7

זרם אירועים גאומטרי מוגדר על ידי פונקצית הסתברות $P(X_t = k)$ למציאת בדיוק k התרחשויות בפרק הזמן $(0, t)$:

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^k \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, \dots$$

נגדיר את המשתנה הרציף $T_j = \{\text{זמן המתנה עד התרחשותו של האירוע ה-} j\}$.

- מהי פונקצית הצפיפות $f_{T_j}(t)$ של T_j ?
- וודא/י כי תכונת הנרמול עבור פונקצית הצפיפות $f_{T_j}(t)$ מסעיף א' מתקיימת.
- מצא/י את התוחלת $E[T_j]$ של זמן ההמתנה עד התרחשותו של האירוע הראשון.

הערה: לידיעתך,

$$\int_0^{\infty} dx x e^{-x} (1 - e^{-x})^{j-1} = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}$$

שאלה H7.8

כזרם אירועים מסוים, זמן המתנה T_j עד התרחשותו של האירוע ה- j מתואר על ידי פונקצית צפיפות ההסתברות $f_{T_j}(t)$. מצא/י את פונקצית ההסתברות $P(X_t = k)$ למציאת בדיוק k התרחשויות בפרק הזמן $(0, t)$.

■ מפתח לשאלות

$$P_0 = \left(1 - \frac{D}{R}\right)^2 \theta(R - D) \quad \text{שאלה H7.1}$$

$$f_{T_f}(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\Theta(t)\Theta\left(\frac{2v}{g} - t\right)}{\sqrt{\left(\frac{2v}{g}\right)^2 - t^2}} \quad \text{ג} ; F_{T_f}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{gt}{2v}, & 0 \leq t < 2v/g \\ 1, & t \geq 2v/g \end{cases} \quad \text{א.} \quad \text{שאלה H7.2}$$

$$E[T_f] = \frac{4v}{\pi g} \quad \text{ג}$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{א.} ; \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{שאלה H7.3}$$

$$\frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{א.} ; 2 - \frac{\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \text{שאלה H7.4}$$

$$c = \frac{1}{2\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \approx 0.257 \quad \text{ג} ; -\sqrt{2} < X < \sqrt{2} \quad \text{א.} \quad \text{שאלה H7.5}$$

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}, \quad b = a - \frac{1}{2}, \quad d = 1, \quad c = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \text{שאלה H7.6}$$

$$\text{ג-2.} \quad E[X] = \frac{25}{24}, \quad \text{ג-3.} \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad \text{שאלה H7.7}$$

$$E[T_j] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \quad \text{ג} ; f_{T_j}(t) = j\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-1} \quad \text{א.} \quad \text{שאלה H7.7}$$

$$P(X_t = k) = \int_0^t d\tau [f_{T_{k+1}}(\tau) - f_{T_k}(\tau)] \quad \text{שאלה H7.8}$$

