



# PROBABILITY AND STATISTICS

## הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנזיפר

© Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07 כל הזכויות שמורות 2006/07

### דף שאלות בית 5

התפלגויות בדידות מיוחדות



#### שאלה H5.1

בוחרים באופן מקרי מספר בעל שתי ספרות מ-00 עד 99 (כלומר לכל אחד מן המספרים הללו יש אותה הסתברות להיבחר).

- מהי ההסתברות שהמספר הנבחר יהיה גדול מ-85?
- מהי ההסתברות שהמספר הנבחר יכיל את הספרה 7?

#### שאלה H5.2

אוטובוס עוזב תחנה מסוימת כל 15 דקות בדיוק. אדם מגיע לתחנה באופן מיקרי בין השעות 8:00 ו-9:00. מהי ההסתברות שימתין לאוטובוס יותר מ-5 דקות? נא להתייחס לזמן כלמשתנה בדיד שנמדד בדקות.

#### שאלה H5.3

איך מפולגים משתנים מקריים שמוגדרים בטבלה? מצא/י את התוחלות של משתנים אלה.

$E[X]$	סוג ופרמטרים של התפלגות	הגדרות הניסוי והמשתנה
		ניסוי: בחירה מקרית עם החזרה של שתי ספרות מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. משתנה: $X =$ {מספר הספרות המתחלקות ב-3 בין שתיים שנבחרו}
		ניסוי: בחירה מקרית של סיפרה אחת מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. משתנה: $X =$ {סיפרה שנבחרה מקרית}
		ניסוי: בחירה מקרית וללא החזרה של שלוש ספרות מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. משתנה: $X =$ {מספר ספרות אי זוגיות בין שלוש שנבחרו}
		ניסוי: בחירה מקרית עם החזרה של סיפרה מהסדרה {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. משתנה: $X =$ {מספר הבחירות עד קבלת סיפרה "5" בפעם השנייה}

### שאלה H5.4

בכז 5 כדורים לבנים, 3 שחורים ו-2 אדומים. מוציאים כדורים בזה אחר זה ומחזירים.

- מהו הסיכוי ששלושת הראשונים יהיו לבנים או שחורים, והרביעי אדום?
- מהו הסיכוי שב-3 הוצאות לא יהיה אפילו כדור אדום אחד?

### שאלה H5.5

מטילים קובייה עד שהמספר 6 מופיע. מהי ההסתברות לכך שיהיה צורך להטיל אותה יותר מ-5 פעמים?

### שאלה H5.6

לכתבנית יש בממוצע אחוז אחד של טעויות הדפסה. חשב/ בקירוב את ההסתברות שבעמוד אחד שבו 500 סימני דפוס תהיה לה לכל היותר טעות אחת.

### שאלה H5.7

באוכלוסיה של מיליון נהגים, כ-5,000 נוהגים ללא רישיון. במחסום משטרה נבדקו בערב אחד 100 נהגים. חשב/ בקירוב את ההסתברות שלפחות אדם אחד נמצא נוהג ללא רישיון.

### שאלה H5.8

במערכת של 3 ניסוי ברנולי, ההסתברות ל-2 הצלחות גדולה פ-12 מזו של 3 הצלחות. מצא/ את  $p$  - ההסתברות להצלחה בניסוי ברנולי בודד.

### שאלה H5.9

במשחק ההימורים מטילים קובייה מאוזנת. אם הקובייה נופלת על הפאה "6", השחקן מקבל 15 ש"ח מהקופה. אם הקובייה נופלת על כל מספר אחר, משלם השחקן לקופה את מספר שקלים אותו מראה הקובייה.

- מצא/ את תוחלת הרווח ואת שונות הרווח של השחקן.
- מהי ההסתברות שהשחקן יזכה (יקבל כסף מהקופה) בדיוק 3 פעמים בסדרה של 10 הטלות?

### שאלה H5.10

בהגרלה המכילה 100 כרטיסים, ישנם מספר פרסים. יוסי קנה שני כרטיסי הגרלה. נתון כי ההסתברות שיוסי ישיג לפחות פרס אחד היא 2%. מצא/ את מספר הפרסים בהגרלה.

### שאלה H5.11

מטילים קובית שש-בש מאוזנת 3 פעמים. מהי ההסתברות:

- לקבל שלוש תוצאות שונות?
- לקבל שלוש תוצאות זהות?
- שלפחות אחת מהתוצאות תהיה שש?

### שאלה H5.12

מכז בו נמצאים 6 כדורים שחורים ו-4 כדורים אדומים, מוציאים באקראי  $n$  כדורים ללא החזרה. ידוע כי ההסתברות שכל הכדורים שהוצאו הם בצבע אדום קטנה פי 5 מההסתברות שכל הכדורים שהוצאו הם שחורים. מהו מספר הכדורים שהוצאו?

### שאלה H5.13

בכד נמצאות שתי קוביות משחק, האחת הוגנת והשנייה מוטה כך שבה  $P(1) = \frac{1}{9}$  ו-  $P(6) = \frac{1}{3}$  וההסתברויות של שאר המספרים שוות. מוציאים קובייה מהכד ומטילים אותה. אם ידוע שבהטלה הראשונה יצא "5", מהי ההסתברות שהקובייה הוגנת?

### שאלה H5.14

יהיה  $X_0, X_1, \dots, X_n$  סדרה של משתנים מקריים כאלה ש-  $X_0 = +1$  ושאר המשתנים נתונים על ידי נוסחת רקורסיה

$$n = 1, 2, \dots \quad \text{עבור} \quad X_n = \begin{cases} +X_{n-1}, & p \text{ בהסתברות} \\ -X_{n-1}, & 1-p \text{ בהסתברות} \end{cases}$$

חשבו את פונקציית ההסתברות של  $X_n$ .

### שאלה H5.15

בבית קפה נשארו מאתמול 10 מנות של עוגת שוקולד ו-6 מנות של עוגת גבינה. עד השעה 9:00 בבוקר בה מגיע משלוח של עוגות טריות, נכנסו 5 סועדים והזמינו כל אחד מנה אחת של עוגה.

- מהי ההסתברות שבשעה 9:00 בבוקר נשארו לפחות 5 מנות עוגת גבינה?
- הרווח עבור עוגת שוקולד הוא 2 מטבעות ועבור עוגת גבינה - 1.5 מטבעות. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של רווח בית הקפה מעוגות יום אתמול?

### שאלה H5.16

יהיה  $X$  משתנה פואסון,  $X \sim P(\lambda)$ . חשבו: א.  $E[X!]$ , ב.  $E[(X+1)!]$ .

### שאלה H5.17

פתח/י קירוב בינומי שלילי להתפלגות היפרגיאומטרית שלילית (הרצאה מס' 5, סעיף 5.10.3).

### שאלה H5.18

הוכח/הוכיחי כי

$$\frac{C_D^{m-1} C_{N-D}^{k-m}}{C_N^{k-1}} \frac{D-(m-1)}{N-(k-1)} = C_{k-1}^{m-1} \frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}$$

(הרצאה מס' 5, סעיף 5.7.2).

### שאלה H5.19

מתוך כד בו  $D$  כדורים אדומים ו-  $(N-D)$  כדורים שחורים הוצאו באקראי וללא החזרה  $n$  כדורים ( $1 \leq n \leq N$ ). לאחר שהוחלפו צבעי הכדורים שנלקחו (כל כדור אדום נצבע בצבע שחור וכל כדור שחור נצבע בצבע אדום), הוחזרו  $n$  הכדורים (בצבעים חדשים) חזרה לכד. במצב החדש נלקח כדור אחד מהכד. מהי ההסתברות שהוא יהיה בצבע אדום?

### שאלה H5.20

קופסה מכילה 30 פתקים ממוספרים מ-1 עד 30. מוצאים 5 פתקים בלי החזרה באופן מקרי.

- מהי ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא לא יעלה על 15?
- מהי ההסתברות שהמספר הגדול ביותר שהוצא יהיה בדיוק 15?

### שאלה H5.21

$n$  מספרים  $\{X_1, \dots, X_n\}$  נבחרו באקראי וללא החזרה מהאוסף  $\{1, 2, \dots, N\}$ ; כאן  $2 \leq n \leq N$ . יהיו  $X_{\min}$  המספר הקטן ביותר בין  $n$  המספרים שנבחרו. מצא/י את

- הערכים האפשריים של  $X_{\min}$ .
- התוחלת  $E[X_{\min}]$ .

הערה: בסעיף ב' נוח להיעזר בנוסחאות שהוכחת ב— (ב) H3.1 ו— H3.3.

## ■ מפתח לשאלות

- א. 0.14 ; ב. 0.19. שאלה H5.1
- 0.6. שאלה H5.2
- א. 64/625 ; ב. 64/125. שאלה H5.4
- $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ . שאלה H5.5
- 0.04. שאלה H5.6
- 0.39. שאלה H5.7
- 1/5. שאלה H5.8
- א. 0, 46.7 ; ב. 0.155. שאלה H5.9
1. שאלה H5.10
- א.  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$  ; ב.  $\frac{6}{6^3}$  ; ג.  $1 - \frac{5^3}{6^3}$ . שאלה H5.11
3. שאלה H5.12
- 6/11. שאלה H5.13
- $P(X_n = -1) = \frac{1 - (2p - 1)^n}{2}$ ,  $P(X_n = +1) = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}$ . שאלה H5.14
- א.  $\frac{C_{10}^5 + C_6^1 C_{10}^4}{C_{16}^5}$  ; ב. 9.06 ; ג. 0.215. שאלה H5.15
- א. עבור  $0 \leq \lambda < 1$   $\frac{e^{-\lambda}}{1 - \lambda}$  ; ב. עבור  $0 \leq \lambda < 1$   $\frac{e^{-\lambda}}{(1 - \lambda)^2}$ . שאלה H5.16
- $\frac{ND + n(N - 2D)}{N^2}$ . שאלה H5.19
- א.  $\frac{C_{15}^5}{C_{30}^5}$  ; ב.  $\frac{C_{14}^4}{C_{30}^5} = \frac{C_1^1 C_{14}^4}{C_{30}^1 C_{29}^4}$  ; ג. 5. שאלה H5.20
- א.  $1 \leq x_{\min} \leq N - n + 1$  ; ב.  $\frac{N + 1}{n + 1}$ . שאלה H5.21

