



PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנזיפר

© Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07 כל הזכויות שמורות 2006/07

דף שאלות בית 4

4.1 פונקצית ההסתברות ופונקצית התפלגות מצטברת

4.2 מדדים של משתנה מקרי



שאלה H4.1

פונקצית ההסתברות עבור משתנה מקרי X עם סטיית התקן $\sigma = 1$ ניתנת על ידי הטבלה:

x	-2	-1	0	1	2
$P_X(x)$	p	p^2	q	p^2	p

- מצא/י את הפרמטרים p ו- q .
- חשבו/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$ וציירו/י אותה.
- חשבו/י את ההסתברויות: $P(X < 1)$, $P(X \geq -1)$, $P(X \geq 0 | X < 2)$.
- חשבו/י את התוחלת $E[X]$.
- מצא/י $E[X^3 + 2]$ ו- $\text{var}[X + 5]$.
- מצא/י את החציון.

שאלה H4.2

מטילים שתי קוביות הוגנות. נגזיר את המשתנה המקרי $X = \{\text{סכום של שתי תוצאות}\}$.

- מהם הערכים האפשריים של X ?
- חשבו/י את פונקצית ההסתברות $P_X(x)$.
- חשבו/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$.
- מהי ההסתברות ש- X לא יעלה על 10?
- חשבו/י את התוחלת $E[X]$ והשונוות $\text{var}[X]$.

שאלה H4.3

מטבע ברזיוס של יחידה אחת נזרק על המישור ויכול לנחות בכול נקודה (X_0, Y_0) על המישור באחידות כך ש- $-N \leq X_0 \leq N$ ו- $-N \leq Y_0 \leq N$ הוא מספר שלם חיובי כלשהו. יהיה משתנה מקרי $M = \{\text{מספר החיתוכים בין שפת המטבע לצירים } X \text{ ו- } Y\}$.

- א. מצא/י את פונקציית ההסתברות $P_M(m)$ של M .
- ב. וודא/י כי הנרמול $\sum_m P_M(m) = 1$ מתקיים.
- ג. חשב/י את התוחלת $E[M]$ והשונות $\text{var}[M]$ של M .
- ד. אם ידוע כי $M = 2$, מהי ההסתברות שמרכז המטבע נחת באיזור $X_0 \geq 1$?

שאלה H4.4

משתנה מקרי X מקבל את הערכים $1, 2, \dots, n$ בהסתברויות $P(X=1), P(X=2), \dots, P(X=n)$ בהתאמה. הוכח/הוכיחי כי התוחלת $E[X^3]$ שווה ל—

$$E[X^3] = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1)P(X \geq k)$$

הערה: נוח להיעזר בנוסחאות $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ ו- $\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

שאלה H4.5

מטילים קובייה מאוזנת ומסכמים את התוצאות. מהי ההסתברות שאי פעם נגיע

- א. לסכום התוצאות ששווה ל-1 ?
- ב. לסכום התוצאות ששווה ל-2 ?
- ג. לסכום התוצאות ששווה ל-3 ?
- ד. לסכום התוצאות ששווה ל-4 ?
- ה. לסכום התוצאות ששווה ל-5 ?
- ו. על סמך החישובים בסעיפים א'–ה', נחש/י את התשובה עבור ההסתברות שאי פעם נגיע לסכום התוצאות ששווה ל- n . האם יחושך מנוגד לאקסיומות של קולמוגורוב? תן/י הסבר.

שאלה H4.6

יהיה X משתנה מקרי בדיד המקבל ערכים שלמים בלבד. הוכח/הוכיחי כי ההסתברות למציאת ערך זוגי של משתנה מקרי זה היא

$$P(X = \text{even}) = \frac{1 + E[(-1)^X]}{2}$$

שאלה H4.7

n מספרים $\{X_1, \dots, X_n\}$ נבחרו באקראי וללא החזרה מהאוסף $\{1, 2, \dots, N\}$; כאן $2 \leq n \leq N$. יהיו X_{\max} המספר הגדול ביותר בין n המספרים שנבחרו. מצא/י את

- א. הערכים האפשריים של X_{\max} .
- ב. התוחלת $E[X_{\max}]$.

הערה: בסעיף ב' נוח להיעזר בנוסחאות שהוכחת ב— **H3.1(ב)** ו— **H3.3**.

■ מפתח לשאלות

שאלה H4.1 א. $q = 3(3\sqrt{2} - 4) \approx 0.728$; $p = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} \approx 0.121$

ב.

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & t < -2, \\ p, & -2 \leq t < -1, \\ \frac{1}{2} - 3p, & -1 \leq t < 0, \\ \frac{1}{2} + 3p, & 0 \leq t < 1, \\ 1 - p, & 1 \leq t < 2, \\ 1, & t \geq 2. \end{cases}$$

ג. $P(X \geq -1) = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} \approx 0.88$, $P(X < 1) = \frac{9\sqrt{2} - 11}{2} \approx 0.86$

$P(X \geq 0 | |X| < 2) = \frac{6\sqrt{2} - 7}{10 - 6\sqrt{2}} \approx 0.98$

ד. 0 ; ה. 2 ; ו. 1 ; ז. 0.

שאלה H4.2 א. ערכים שלמים בתחום $2 \leq x \leq 12$; ד. $11/12$; ה. $7/6$; ו. $35/6$

שאלה H4.3 א. $P(M = 4) = \frac{1}{N^2}$, $P(M = 2) = \frac{2}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)$, $P(M = 0) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$

ג. $E[M] = \frac{4}{N}$, $\text{var}[M] = \frac{8(N-1)}{N^2}$; ד. $1/4$

שאלה H4.5 א. $\frac{1}{6}$; ב. $\frac{7}{6^2}$; ג. $\frac{7^2}{6^3}$; ד. $\frac{7^3}{6^4}$; ה. $\frac{7^4}{6^5}$; ו. $\frac{1}{6} \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$, הניחוש מנוגד

לאקסיאומה השנייה של קולמוגורוב עבור $n \geq 13$.

שאלה H4.7 א. ערכים שלמים בתחום $n \leq x_{\max} \leq N$; ב. $E[X_{\max}] = \frac{n}{n+1} (N+1)$

