



# PROBABILITY AND STATISTICS

## הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנזיפר

© Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07 כל הזכויות שמורות 2006/07

### ■ דף שאלות בית 2

2.1 הסתברות מותנית, שלמה ונוסחת בייס

2.2 מעגלים חשמליים – שני סוגים



#### שאלה H2.1

מטילים שתי קוביות הוגנות. מהי ההסתברות לקבלת

- סכום 10 לפחות, אם ידוע כי בקובייה הראשונה נתקבל 6 ?
- סכום 10 לכל היותר, אם ידוע כי בקובייה הראשונה נתקבל 6 ?

#### שאלה H2.2

הסתברות שטיסה תצא בזמן היא  $p_1$ . הסתברות שטיסה תגיע בזמן היא  $p_2$ . הסתברות שטיסה תצא בזמן ותגיע בזמן היא  $p_3$ .

- מהי ההסתברות שטיסה תגיע בזמן אם ידוע שהיא יצאה בזמן?
- מהן ההגבלות על הערכים של  $p_1$ ,  $p_2$  ו- $p_3$  ?

#### שאלה H2.3

במפעל מסוים פועלות שתי מכונות  $A$  ו- $B$ . 10% מתוצרת המפעל מיוצרות במכונה  $A$  ו-90% במכונה  $B$ . נתון כי 1% מהמוצרים המיוצרים במכונה  $A$  ו-5% מהמוצרים המיוצרים במכונה  $B$  הם פגומים.

- נבחר מוצר באקראי. מהי ההסתברות שהוא פגום?
- נמצא מוצר פגום. מהי ההסתברות שהוא מיוצר במכונה  $A$  ?

#### שאלה H2.4

במעגל המתואר בשאלת בית H1.7, כל אחד מהמפסקים סגור בהסתברות  $p$ . מהי ההסתברות שהמפסק  $S_1$  פתוח אם ידוע כי קיימת אות ביציאה?

#### שאלה H2.5

סוכן בוחר באופן מקרי באחת משלוש ערים  $A$ ,  $B$  ו- $C$ . הסיכוי לגשם בעיר  $A$  הוא  $1/3$ , בעיר  $B$  הוא  $1/4$  ובעיר  $C$  הוא  $1/6$ . סוכן חוזר מהעיר בה בחר כשמכוניתו רטובה מגשם. מהו הסיכוי לכך שהוא בחר בעיר  $C$  ?

### שאלה H2.6

סטודנט עונה על שאלת מבחן על ידי בחירת תשובה אחת מתוך  $m$  תשובות אפשריות נתונות. בהסתברות  $p$  הסטודנט למד את החומר לפני המבחן; בהסתברות  $1-p$  הוא לא למד וכתוצאה נאלץ לנחש את התשובה מחוסר ידע.

- א. מהי ההסתברות שהסטודנט ידע את התשובה הנכונה (הכוונה: למד את החומר) אם נתון כי הוא בחר בתשובה הנכונה?  
 ב. נתח' את תשובתך עבור  $m=1$  ו-  $m \rightarrow \infty$ .

### שאלה H2.7

ספק של שבבים אלקטרוניים מקבל תוצרת של שני מפעלים. מפעל  $A$  מספק 40% מהסחורה ומפעל  $B$  – 60% מהסחורה. מנסיון העבר ידוע ש-20% מהשבבים של מפעל  $A$  פסולים. במפעל  $B$  מתנהלת העבודה בשתי משמרות כאשר בין השבבים שמוינו במשמרת יום ישנן 10% פסולים ובין אלה שמוינו במשמרת לילה יש 30% פסולים. במשמרת היום מייצרים 70% מהשבבים.

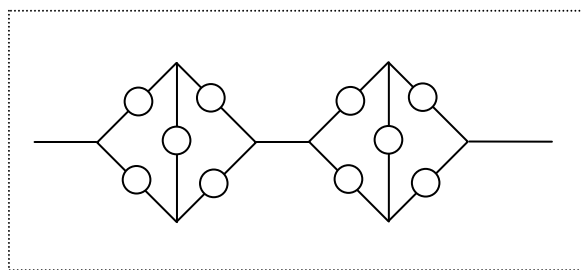
- א. מהי ההסתברות לשביב פסול אצל הספק?  
 ב. מהי ההסתברות לכך ששביב שנמצא פסול יוצר במפעל  $A$ ?  
 ג. מהי ההסתברות ששביב שנמצא פסול יוצר במשמרת יום (של מפעל  $B$ )?  
 ד. מהי ההסתברות ששביב שנמצא פסול יוצר במשמרת לילה (של מפעל  $B$ )?

### שאלה H2.8

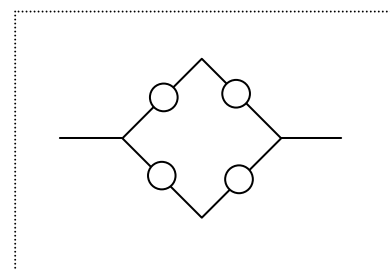
ניח שההסתברות לכך שמזג האוויר (גשם או שמש) ביום מסויים יהיה כפי שהיה ביום הקודם היא  $p$ . נתון שהיום יורד גשם. מהי ההסתברות לכך שמחרתיים ירד גשם? יש להניח כי מזג האוויר ביום מסויים תלוי אך ורק במזג האוויר של יום הקודם.

### שאלה H2.9

מעגל חשמלי המורכב מארבע יחידות (ראה/ ציור א') פועל בהסתברות  $\frac{5}{9}$ . מהי ההסתברות שהמעגל המשורטט בציור ב' יפעל? נא להניח כי כל היחידות פועלות ללא תלות בהסתברות זהה.



ציור ב'



ציור א'

### שאלה H2.10

נא להוכיח את הנוסחה הבאה:

$$P((A \cup B) / C) = P(A / C) + P(B / C) - P((A \cap B) / C)$$

### שאלה H2.11

מאורעות  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים. אילו טענות מהטבלה נכונות תמיד?

בחירתך	טענה
(א)	$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
(ב)	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
(ג)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
(ד)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(ה)	$P(A/B) = P(A)$
(ו)	$P(A/B) = P(A)/P(B)$

### שאלה H2.12

מעגל חשמלי מורכב מיחידות  $A, B, C, D$  ו- $E$ . בהנחה כי הסתברות המאורע  $Q = \{\text{מעגל כולו פעול}\}$  ניתנת על ידי הנוסחה

$$P(Q) = P((A \cup C) \cap (B \cup D)) \cdot P(E) + P((A \cap B) \cup (C \cap D)) \cdot P(\bar{E})$$

ציירי את המעגל.

### שאלה H2.13

מאורעות  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים ולא ריקים. אילו טענות מהטבלה נכונות?

בחירתך	טענה
(א)	$P(A) = P(A \setminus B) + P(A) \cdot P(B)$
(ב)	$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
(ג)	$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A) \cdot P(B)$
(ד)	$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) - P(A) \cdot P(B)$
(ה)	$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

### שאלה H2.14

עבור מאורעות  $A$  ו- $B$  בלתי תלויים, בטא/י את ההסתברות  $P(\bar{A}/(A \cup \bar{B}))$  דרך ההסתברויות  $P(A)$  ו- $P(B)$ .

### שאלה H2.15

בקובע עורבבו שלושה קלפים. לקלף הראשון ישנם שני צדדים בצבע אדום, לקלף השני ישנם שני צדדים בצבע שחור ולקלף השלישי ישנם שני צדדים בצבעים שונים - אדום ושחור. קלף אחד נלקח מקובע באקראי ומונח על השולחן. ים ידוע שהצד העליון של הקלף הזה הוא בצבע אדום, מהי ההסתברות שהצד התחתון שלו הוא בצבע שחור?

## H2.16 שאלה

נתונים  $n$  מאורעות זרים בזוגות:  $A_1, \dots, A_k, \dots, A_n$  כאלה ש-  $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \neq 1$ . אילו טענות מהטבלה נכונות ?

טענה	בחירתך
אזי המאורעות $A_1, \dots, A_k, \dots, A_n$ הם בהכרח מאורעות בלתי תלויים.	(א)
אזי מתקיים: $P(A_k / A_1 \cup \dots \cup A_n) = \frac{P(A_k)}{P(A_1) + \dots + P(A_n)}$	(ב)
אזי מתקיים: $P(\overline{A_k} / \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = 1$	(ג)
אזי מתקיים: $P(A_k / \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}) = \frac{P(A_k)}{1 - (P(A_1) + \dots + P(A_n))}$	(ד)
אזי מתקיים: $P(\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}) = 1 - P(A_1)P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$	(ה)

## ■ מפתח לשאלות

H2.1 שאלה א.  $1/2$ ; ב.  $2/3$ .

H2.2 שאלה א.  $\frac{p_3}{p_1}$ ; ב.  $0 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 1, p_3 \leq \min(p_1, p_2)$ .

H2.3 שאלה א.  $0.046$ ; ב.  $0.022$ .

H2.4 שאלה  $(1-p) \frac{1 - (1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}$

H2.5 שאלה  $2/9$ .

H2.6 שאלה א.  $\frac{pm}{pm + (1-p)}$ .

H2.7 שאלה א.  $0.176$ ; ב.  $0.45$ ; ג.  $0.24$ ; ד.  $0.31$ .

H2.8 שאלה  $2p^2 - 2p + 1$

H2.9 שאלה  $\left(\frac{3+8\sqrt{3}}{27}\right)^2 \approx 0.389$

H2.11 שאלה ב, ג, ה.

א, ג. **שאלה H2.13**

$$\frac{(1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))}{P(A) + (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))}$$

**שאלה H2.14**

.1/3 **שאלה H2.15**

ב, ג. **שאלה H2.16**

