



PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנזיפר

2006/07 © Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07

■ דף שאלות כיתה 5

5.1 התפלגויות בדידות מיוחדות



שאלה C5.1

מצא/י את תוחלתו $E[X]$ ושונויות $\text{var}[X]$ של משתנה מקרי בדיד X בעל התפלגות אחידה $X \sim U_d(a, b)$.

שאלה C5.2

חשב/י את התוחלת של משתנה מקרי בינומי $X \sim \text{Bin}(n, p)$ בשתי דרכים:

א. באמצעות הזהות מהשאלה H3.1-ב': $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

ב. באמצעות טריק הגזירה של הפונקציה $f_n(p, q) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$.

שאלה C5.3

במטבע מזויף, הסתברות לתוצאה "עץ" כפולה מהסתברות לתוצאה "פלי". מטבע הוטל n פעמים בזו אחר זו. יהיה $X = \{\text{מספר התוצאות "עץ"}\}$ בסדרה של n הטלות. מצא/י את פונקציית ההסתברות של X וחשב את התוחלת, את השונות ואת סטיית התקן של X .

שאלה C5.4

אריק ואהוד משחקים בסדרת המשחקים הבאה: בכל משחק מטיל כל שחקן קובייה מאוזנת. אם אחד השחקנים מקבל מספר גבוה יותר מידידו, מקבל השחקן מטבע אחד מהקופה.

- יהיה X רווח של אריק בסדרה של 10 משחקים. מהי ההתפלגות של X ? מהי תוחלתו ומהי שונותו?
- בקופה 9 מטבעות בלבד. מהי ההסתברות שהם לא יספיקו לסדרה של 10 משחקים?
- איך תשתנה התשובה בסעיף ב' אם יהיו בקופה 8 מטבעות?
- כמה משחקים בממוצע ישחקו אריק ואהוד עד אשר ישולם המטבע הראשון מהקופה?
- לכמה משחקים, בממוצע, יספיקו 9 המטבעות שבקופה?

שאלה C5.5

יהיה X משתנה מקרי גיאומטרי, $X \sim G(p)$. הוכח/הוכיחי כי עבור כל $k \geq 1$ ו- $n \geq 1$ מתקיימת התכונה:

א. $P(X = k + n \mid X > k) = P(X = n)$

ב. תחונה זו נקראת תכונת "חוסר זיכרון". מדוע?

שאלה C5.6

אורך חיי סללה X (בימים שלמים) מתפלג גיאומטרית. במחסן חלפים תוצרת של 3 מפעלים. אורך החיים הממוצע של סוללות ממפעל A הוא 20 יום, של מפעל B – 15 יום ושל מפעל C – 12 יום. חצי מהחלפים במחסן הם מתוצרת מפעל A , $1/6$ הם ממפעל B ו- $1/3$ ממפעל C .

- א. מהי ההסתברות שסוללה שנבחרה מקרית תפעל יותר מ-13 יום (מאורע E)?
- ב. סוללה פעלה יותר מ-13 יום. מהי ההסתברות שהיא ממפעל A ?

שאלה C5.7

מצא/י את ההסתברות שמתוך 5 אנשים הראשונים שפגשת ביום מסוים, לפחות 3 נולדו בשבת?

שאלה C5.8

תן/תני פתרון אלטרנטיבי לסעיף ב' של שאלת כיתה C3.9 המבוסס על התפלגות בינומית.

שאלה C5.9

מכד בו נמצאים 8 כדורים, חלקם בצבע אדום וחלקם בצבע שחור, מוציאים באקראי 2 כדורים: א' ללא החזרה, ב' עם החזרה. נסמן ב- P_n את ההסתברות שבניסוי א' (ב') כל הכדורים שהוצאו מהכד הם בצבע אדום. נתון

$$\text{כי } \frac{P_n}{P_1} = \frac{16}{21}. \text{ מהו מספר הכדורים האדומים בכד?}$$

שאלה C5.10

נתונים שני כדים: הראשון מכיל N_1 כדורים וביניהם D_1 כדורים אדומים. השני מכיל N_2 כדורים וביניהם D_2 כדורים אדומים.

א. שני כדורים נלקחו באקראי מהכד הראשון והוספו לכד השני. לאחר מכן, כדור אחד נלקח מהכד השני. מהי ההסתברות שהכדור הנלקח מהכד השני הוא בצבע אדום? נא להניח כי $N_1 \geq 2$.

ב. חזור/חזרי על שאלת סעיף א' כאשר לא שניים אלא n כדורים נלקחו באקראי מהכד הראשון והוספו לכד השני. במקרה זה, מהי ההסתברות שהכדור הנלקח מהכד השני הוא בצבע אדום? נא להניח כי $N_1 \geq n$.

שאלה C5.11

יהיה X_0, X_1, \dots, X_n סדרה של משתנים מקריים כאלה ש- $X_0 = +1$ ושאר המשתנים נתונים על ידי נוסחת רקורסיה

$$n = 1, 2, \dots \quad \text{עבור } X_n = \begin{cases} +X_{n-1}, & \text{בהסתברות } p \\ -X_{n-1}, & \text{בהסתברות } 1-p \end{cases}$$

חשב/י

- א. את ההסתברות $P(X_1 = +1, X_2 = -1, X_3 = -1)$.
- ב. את התוחלת $E[X_n]$.
- ג. את השונות $\text{var}[X_n]$.