



PROBABILITY AND STATISTICS

הסתברות וסטטיסטיקה

מאת יוג'ין קנזיפר

2006/07 © Eugene Kanzieper © All rights reserved 2006/07

דף שאלות כיתה 4

4.1 פונקצית ההסתברות ופונקצית התפלגות מצטברת

4.2 מדדים של משתנה מקרי

שאלה C4.1

סענה: משתנה מקרי X מקבל את הערכים 2^k (כאן $k=1, 2, 3, \dots$) בהסתברויות $p_k = \frac{1}{2^k}$.

- האם זה אפשרי?
- מהי ההסתברות למצוא X שלא יעלה על 100?
- מהי ההסתברות ש- X יקבל ערך בין 100 ל-300 (לא כולל גבולות)?
- חשבו את התוחלת $E[X]$.

שאלה C4.2

סענה: משתנה מקרי X מקבל את הערכים $k=2, 3, 4, \dots$ בהסתברויות $p_k = \frac{1}{k}$. האם זה אפשרי?

שאלה C4.3

פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי X נתונה על ידי הנוסחה:

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 1, 2 \\ \frac{1}{2^{k-1}}, & k = 3, 4, \dots \end{cases}$$

- וודא/י שאכן זאת פונקצית ההסתברות.
- מהי ההסתברות ש- X יקבל ערך זוגי?
- מהי ההסתברות ש- X יקבל ערך אי-זוגי?
- חשבו את התוחלת $E[X]$.

שאלה C4.4

משתנה מקרי X המתואר על ידי פונקצית ההסתברות $P_X(x)$ מקבל את הערכים 1, 2, ..., n . נא להוכיח כי

$$E[X] = \sum_{k=1}^n P(X \geq k) \quad \text{א.}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot P(X \geq k) \quad \text{ג.}$$

שאלה C4.5

משתנה מקרי X יכול לקבל את הערכים 0, 1, 2. האם תוכלי להצמיד לערכים אלה הסתברויות:

- א. כך שתקבל התחלת $E[X] = 1$?
- ב. כך שתקבל התחלת $E[X^2] = 5/3$?
- ג. כך שיתקבלו התחלות $E[X] = 1$ ו- $E[X^2] = 5/3$?
- ד. אם $E[X] = 1$, מהו הערך הגדול ביותר שיכולה התחלת $E[X^2]$ לקבל?

שאלה C4.6

פונקציית התפלגות מצטברת עבור משתנה מקרי X נתונה על ידי הנוסחה

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq t < 1 \\ a, & 1 \leq t < 2 \\ 2a, & 2 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

כאן, פרמטר a לא ידוע.

- א. מצאי את הפרמטר a אם נתון כי $E[X] = \frac{7}{4}$.
- ב. חשבי את השונות, החציון והשכיח עבור משתנה מקרי X .
- ג. חשבי את ההסתברויות $P(X \geq 0)$, $P(X = 1)$, $P\left(X < \frac{3}{2}\right)$.
- ד. מהי ההסתברות ש- X מקבל ערכים אי זוגיים?

שאלה C4.7

לכד המכיל כדור אדום אחד מוסיפים מספר מקרי של כדורים שחורים. ההסתברות שבדיוק k כדורים הוספו היא

$$P_k = \frac{c}{k!} \quad \text{עבור } k = 0, 1, 2, \dots$$

- א. מצאי את הפרמטר c .
- ב. נלקח כדור אחד מהכד. מהי ההסתברות שהוא בצבע אדום?
- ג. אם ידוע כי הכדור הנלקח הוא בצבע שחור, מהי ההסתברות שהוסיפו בדיוק n כדורים שחורים?