



PROBABILITY FOR ENGINEERS

הסתברות למהנדסים

פרופ' יוג'ין קנזיפר

© Eugene Kanzieper © All rights reserved 2010/11 כל הזכויות שמורות 2010/11

■ נוסחאון למבחן סוף הקורס

הרצאה 1: מושגי יסוד

הגדרות בסיסיות

- **מרחב המידגם** Ω – אוסף כל התוצאות האפשריות של הניסוי.
- **מאורע** A – קבוצה חלקית כלשהי של תוצאות ניסוי.
- **הסתברות של המאורע** A היא $P(A) = |A|/|\Omega|$. הנוסחא מניחה סבירות שווה של כל אחת מן התוצאות האפשריות של ניסוי אקראי.

אלגברת מאורעות

- **איחוד** $A \cup B$ – אוסף כל המאורעות הכלולים ב- A **או** ב- B **או** בשניהם.
- **חיתוך** $A \cap B$ – אוסף כל המאורעות הכלולים ב- A **וגם** ב- B .
- **מינוס** $A \setminus B$ – אוסף כל המאורעות הכלולים ב- A **ולא** כלולים ב- B .
- **השלמה** \bar{A} – אוסף כל המאורעות הכלולים במרחב המדגם **ולא** כלולים ב- A .
- **הכלה** $A \subset B$ – כל תוצאה השייכת למאורע A שייכת **גם** למאורע B .

סוגי מאורעות

- **מאורע וודאי** Ω – מאורע שכולל את כל המאורעות של מרחב המדגם.
- **מאורע ריק** \emptyset – תוצאה בלתי אפשרית, מאורע שאינו כולל אף מאורע של מרחב המדגם.
- **מאורעות זרים** – A ו- B הם מאורעות זרים אם הם לא כוללים מאורעות משותפים, $A \cap B = \emptyset$.
- **מאורעות זרים בזוגות** – A_i ו- A_j הם מאורעות זרים בזוגות אם $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$.

תכונות של פונקציית הסתברות וחוקים חשובים

- $0 \leq P(A) \leq 1$ לכל A .
- $P(\Omega) = 1$ כאשר Ω הוא מרחב המדגם.
- אם A_i ו- A_j הם מאורעות זרים בזוגות, אזי $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$
- אם $A \subset B$ אזי $P(A) \leq P(B)$.
- **חוק המשלים**: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **חוק האיחוד**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **חוק קומוטטיבי**: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.
- **חוק אסוציאטיבי**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- **חוק דיסטריבוטיבי**: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- **חוק דה מורגן**: $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

הרצאה 2: הסתברות מותנית

הסתברות מותנית ואי תלות

- **נוסחא להסתברות מותנית:** $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$
- **אי תלות** – המאורעות A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- במילים אחרות, עבור מאורעות בלתי תלויים מתקיים: $P(A/B) = P(A)$.

הסתברות שלמה

- **הסתברות שלמה** – אם A_1, A_2, \dots, A_n הם מאורעות זרים בזוגות, כך ש- $A_i \cap A_j = \emptyset$ עבור כל זוג $i \neq j$, ואיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ (זאת אומרת $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \Omega$), אזי לכל מאורע B מתקיים: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)$.

משפט בייס

- **משפט בייס** – עבור מאורעות A ו- B בעלי הסתברות חיובית מתקיים:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- **משפט בייס בשילוב נוסחא להסתברות שלמה:**

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B/A_j) \cdot P(A_j)}$$

הרצאה 3: קומבינטוריקה

עצרת של מספר, פונקצית גאמא ונוסחת סטירלינג

- **עצרת של מספר:** מוגדר עבור מספרים שלמים חיוביים $n = 1, 2, 3, \dots$ ושווה ל- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
- **פונקצית גאמא:** $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} dt t^\alpha e^{-t}$ (מוגדרת עבור $\alpha > -1$). עבור $\alpha = n$ מתקיים: $n! = \Gamma(n + 1)$.
- **נוסחת סטירלינג:** עבור $n \gg 1$ מתקיים בקירוב $n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} e^{-n}$.

עקרון הכפל

- **ניסוח ראשון:** אם ניסוי מתבצע ב- k שלבים בזה אחר זה כאשר בשלב הראשון יש n_1 תוצאות אפשריות, בשלב השני יש n_2 תוצאות אפשריות, ..., בשלב ה- k יש n_k תוצאות אפשריות, אזי מספר התוצאות האפשריות בניסוי כולו שווה ל- $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.
- **ניסוח שני – כלל שרשרת:** לכל A_1, A_2, \dots, A_n מתקיים: $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$.

מספר סידורים ונוסחא מולטינומית

- של n איברים שונים בשורה שווה ל- $P_n = n!$.
- של n איברים שונים במעגל שווה ל- $(n-1)!$.
- של n איברים בשורה שמתוכם n_1 איברים זהים מסוג ראשון, n_2 איברים זהים מסוג שני, ..., n_k איברים זהים מסוג ה- k (כך ש- $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) שווה ל- $P_n(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

- נוסחא מולטינומית

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0): \\ n_1 + \dots + n_k = n}} P_n(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} = \sum_{\substack{(n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0): \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

מספר בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
מסודרת	n^k	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
לא מסודרת	—	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הרצאה 4: משתנה מקרי חד ממדי

פונקצית הסתברות $P_X(x)$ ופונקצית התפלגות מצטברת $F_X(t)$

- תכונות של פונקצית הסתברות:

א. $0 \leq P(x) \leq 1$ לכל ערך x .

ב. $\sum_x P(x) = 1$.

- פונקצית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{x \leq t} P_X(x)$

- תכונותיה:

א. $F_X(t = -\infty) = 0$

ב. $F_X(t = +\infty) = 1$

ג. אם $t_1 < t_2$, $F_X(t_1) \leq F_X(t_2)$

ד. עבור $x_1 < x_2$, $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

מדדים של משתנה מקרי

- תוחלת ותכונותיה:

א. $\mu = E[X] = \sum_x x \cdot P_X(x)$

ב. $E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot P_X(x)$

ג. $E[a] = a$ קבוע a .

ד. $E[X + a] = E[X] + a$ קבוע a .

ה. $E[b \cdot X] = b \cdot E[X]$ קבוע b .

ו. $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$

- שונות, סטיית תקן ותכונותיהן:

א. $\sigma^2 = Var[X] = E[(X - \mu)^2]$

ב. $\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

- ג. $\sigma = \sqrt{Var[X]}$
- ד. $Var[X] \geq 0$ לכל משתנה מקרי X .
- ה. $Var[X] = 0$ אך ורק כאשר X הוא קבוע.
- ו. $Var[X + a] = Var[X]$, a קבוע.
- ז. $Var[b \cdot X] = b^2 \cdot Var[X]$, b קבוע.
- ח. אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים (מתייחסים לשני ניסויים בלתי תלויים), אזי מתקיים: $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

הרצאה 5: התפלגויות בדידות מיוחדות

התפלגות אחידה

- **סימון:** $X \sim U_d(a, b)$, a ו- b מספרים שלמים.
- **פונקציית הסתברות:** עבור $k = a, a+1, \dots, b$ $P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$
- **תוחלת:** $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- **שונות:** $Var[X] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$
- **פונקציית התפלגות מצטברת:** עבור $k = a, a+1, \dots, b$ $F_X(k) = P(X \leq k) = \frac{k-a+1}{b-a+1}$

התפלגות ברנולי – "הצלחה" או "כשלון"

- **סימון:** $X \sim \text{Ber}(p)$, $0 \leq p \leq 1$
- **פונקציית הסתברות:** $P_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$
- **תוחלת:** $E[X] = p$
- **שונות:** $Var[X] = p(1-p)$

התפלגות בינומית – מספר כולל של "הצלחות" בסדרת ניסוי ברנולי

- **סימון:** $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $0 \leq p \leq 1$, n מספר שלם חיובי
- **פונקציית הסתברות:** עבור $k = 0, 1, \dots, n$ $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- **תוחלת:** $E[X] = np$
- **שונות:** $Var[X] = np(1-p)$
- **משפט הפירוק:** סכום X של n משתני ברנולי X_1, X_2, \dots, X_n בלתי תלויים בעלי אותו פרמטר p מתפלג בינומית עם פרמטרים n ו- p :
- $X = \sum_{k=1}^n X_k = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim B(n, p)$
- **קירוב פואסוני להתפלגות בינומית:** אם פרמטר n גדול מאוד ($n \gg 1$) ו- p קטן מאוד ($p \ll 1$) כך שהכפל $\lambda = n \cdot p$ מקבל ערך "בינוני", בקירוב מתקיים:
- $P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

התפלגות גיאומטרית – מספר ניסוי ברנולי עד ל"הצלחה הראשונה"

- סימון: $X \sim G(p)$, $0 \leq p \leq 1$.
- פונקציית הסתברות: $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ עבור $k = 1, \dots, \infty$.
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(k) = P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$ עבור $k = 1, \dots, \infty$.
- הסתברות: $P(X > k) = (1-p)^k$ עבור $k = 1, \dots, \infty$.
- תוחלת: $E[X] = \frac{1}{p}$. שונות: $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$.
- תכונת "חוסר זיכרון": $P(X > k+n \mid X > k) = P(X > n)$.

התפלגות בינומית שלילית – מספר ניסוי ברנולי עד ל"הצלחה ה- m "

- סימון: $X \sim \text{NegBin}(p, m)$, $0 \leq p \leq 1$, $m = 1, 2, \dots, \infty$.
- פונקציית הסתברות: $P(X = k) = C_{k-1}^{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$ עבור $k = m, m+1, \dots, \infty$.
- תוחלת: $E[X] = \frac{m}{p}$. שונות: $Var[X] = \frac{m(1-p)}{p^2}$.

התפלגות היפרגיאומטרית – מספר פריטים מיוחדים בבחירה ללא החזרה מאוסף מעורב

- סימון: $X \sim \text{Hyp}(N, D, n)$, $n, D \leq N$.
- פונקציית הסתברות: $P(X = k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$ עבור $0 \leq k \leq \min(n, D)$.
- תוחלת: $E[X] = n \frac{D}{N}$. שונות: $Var[X] = n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$.
- קירוב בינומי להתפלגות היפרגיאומטרית: אם $D, N \gg 1$ אך $\frac{D}{N} = p$ שומר על ערך סופי וגם $k \leq n \ll D < N$, בקירוב מתקיים: $P(X = k) \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- קירוב בינומי להתפלגות היפרגיאומטרית: אם $D, N \gg 1$ אך $\frac{D}{N} = p$ שומר על ערך סופי וגם $k \leq n \ll D < N$, בקירוב מתקיים: $P(X = k) \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

התפלגות היפרגיאומטרית שלילית – מספר הוצאות ללא החזרה עד הפריט המיוחד ה- m

- סימון: $X_m \sim \text{NegHyp}(m; N, D)$, $1 \leq D < N$, $1 \leq m \leq D$.
- פונקציית הסתברות: $P(X_m = k) = C_{k-1}^{m-1} \frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}$ עבור $k = m, \dots, N - D + m$.
- תוחלת: $E[X_m] = m \frac{N+1}{D+1}$. שונות: $Var[X_m] = m \frac{N+1}{D+1} \frac{N-D}{D+2} \left(1 - \frac{m}{D+1}\right)$.

התפלגות פואסון – מספר התרחשויות ביחידת זמן בזרם אירועים פואסוני

- סימון: $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.
- פונקציית הסתברות: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ עבור $k = 0, \dots, \infty$.
- תוחלת: $E[X] = \lambda$.
- שונות: $Var[X] = \lambda$.

הרצאה 6: משתנה מקרי דו ממדי

פונקציית הסתברות משותפת $P_{XY}(x, y)$ ופונקציות הסתברות שוליות $P_X(x)$ ו- $P_Y(y)$

- **תכונות של פונקציית הסתברות משותפת:**
 - א. $0 \leq P_{XY}(x_i, y_j) \leq 1$ לכל זוג ערכים אפשרי (x_i, y_j) .
 - ב. $\sum_{x_i} \sum_{y_j} P_{XY}(x_i, y_j) = 1$.
- **פונקציות הסתברות שוליות:**
 - א. $P_X(x_i) = \sum_{y_j} P_{XY}(x_i, y_j)$.
 - ב. $P_Y(y_j) = \sum_{x_i} P_{XY}(x_i, y_j)$.

תלות ומתאם

- **אי תלות:** שני משתנים מקריים בעלי התפלגות משותפת P_{XY} נקראים משתנים בלתי תלויים אם לכל זוג (x_i, y_j) מתקיים $P_{XY}(x_i, y_j) = P_X(x_i)P_Y(y_j)$.
- **אי מתאם:** שני משתנים מקריים נקראים בלתי מתואמים אם מתקיים $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$. פה $E[X \cdot Y] = \sum_{x_i, y_j} x_i y_j P(x_i, y_j)$.
- אם X, Y הם משתנים בלתי תלויים, אזי הם גם בלתי מתואמים. ההפך לא בהכרח נכון!

מדדים של משתנה דו ממדי

- **שונויות משותפת:** $Cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$.
- **מקדם המתאם:** $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}$.
- **תכונות של מקדם המתאם:**
 - א. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.
 - ב. לכל $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ חיוביים מתקיים $\rho(\beta X + \alpha, \gamma Y + \delta) = \text{sgn}(\beta\gamma)\rho(X, Y)$.
 - ג. לכל X ו- Y מתקיים: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq +1$.
 - ד. עבור משתנים בלתי מתואמים $\rho(X, Y) = 0$.
 - ה. אם $Y = aX + b$ אזי: $\rho(X, Y) = +1$ עבור $a > 0$ ו- -1 עבור $a < 0$.

שונויות של סכום המשתנים ורגרסיה לינארית

- **שונויות הסכום:** $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X, Y)$.
- **רגרסיה לינארית:** הניבוי הלינארי הטוב ביותר ל- Y בהינתן X ניתן על ידי קו הרגרסיה $Y = aX + b$ עם הפרמטרים

$$a = \frac{Cov(X, Y)}{Var[X]} = \rho(X, Y) \sqrt{\frac{Var[Y]}{Var[X]}}, \quad b = E[Y] - E[X] \frac{Cov(X, Y)}{Var[X]}$$

עבור מדגמים גדולים, יש להשתמש בנוסחאות: $E[X] \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$,

$$Cov(X, Y) \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y}) \quad \text{ו-} \quad Var[X] \approx \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

הרצאה 7: משתנה מקרי רציף

הסתברות, פונקציית צפיפות ופונקציית התפלגות מצטברת

- **הסתברות:** $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$
- **תכונותיה של פונקציית צפיפות:**
 - א. $f_X(x) \geq 0$. ב. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
- **פונקציית התפלגות מצטברת:** $F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$
- **נוסחת הקשר:** $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$
- **תוחלת:** $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$
- **שונות:** $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right)^2$

התפלגות אחידה

- **סימון:** $a < b, X \sim U_c(a, b)$
- **פונקציית צפיפות:**

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
- **פונקציית התפלגות מצטברת:**

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t < b \\ 1, & t \geq b \end{cases}$$
- **תוחלת:** $E[X] = \frac{a+b}{2}$. **שונות:** $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

התפלגות מערכית – זמן המתנה עד התרחשותו האירוע הראשון בזרם פואסוני

- **סימון:** $\lambda > 0, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$
- **פונקציית צפיפות:**

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda y), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$
- **פונקציית התפלגות מצטברת:** $F_Y(t) = P(Y \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
- **תוחלת:** $E[Y] = \frac{1}{\lambda}$. **שונות:** $Var[Y] = \frac{1}{\lambda^2}$
- **תכונת "חוסר זיכרון":** $P(Y > s+t \mid Y > s) = P(Y > t)$
- **זמן המתנה עד תרחשותו האירוע ה- k בזרם אירועים פואסוני מתפלג על פי החוק:**

$$f_T(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}$$

התפלגות נורמלית

- **סימון:** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- **פונקציית צפיפות:** עבור $-\infty < x < +\infty$ $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.
- **תוחלת:** $E[X] = \mu$. **שונות:** $Var[X] = \sigma^2$. **פונקציית-Phi:** $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dz e^{-z^2/2}$.
- **פונקציית התפלגות מצטברת:** $F_X(t) = P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
- **הסתברות:** $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.
- **תכונה:** סכום של משתנים נורמליים $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ו- $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ בלתי תלויים, מתפלג נורמלית גם כן: $X = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

הרצאה 8: משפט הגבול המרכזי פלוס

קירוב נורמלי להתפלגות בינומית – משפט דה מואבר-לפלס

- עבור $n \gg 1$, **משתנה בינומי** $X_B \sim \text{Bin}(n, p)$ מתנהג **כמשתנה נורמלי** $X_B \mapsto X_N \sim N(np, np(1-p))$.
- **תיקון רציפות בחישוב הסתברויות:**
 - $P(X_B = k) = P(k - \frac{1}{2} < X_N < k + \frac{1}{2}) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.
 - $P(X_B \leq k) = P(X_N \leq k + \frac{1}{2}) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$.

משפט הגבול המרכזי

- **משפט:** יהיו X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 . אם n גדול מאוד, $n \gg 1$, המשתנה $X = \sum_{k=1}^n X_k$ מתפלג נורמלית בקירוב: $X = \sum_{k=1}^n X_k \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.
- **הסתברויות:**
 - אם X_1, X_2, \dots, X_n הם משתנים **רציפים**, בקירוב מתקיים: $P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$.
 - אם X_1, X_2, \dots, X_n הם משתנים **בדדים**, בקירוב מתקיים: $P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 + \frac{1}{2} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$.
- **משפט על ממוצע:** יהיו X_1, X_2, \dots, X_n התצפיות עבור משתנה מקרי כלשהו. אם n גדול מאוד, $n \gg 1$, הממוצע $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ מתפלג נורמלית בקירוב $\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

