מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

כ"ה בְּתַמּוּז תשע"א
27.07.2011

סמסטר: ב'
מועד: ב'

מבחן ב"הסתברות למהנדסים" – 20019

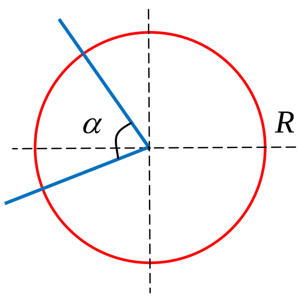
מרצים: פרופ' יוג'ין קנציפר, מר אלכסנדר קפלונובסקי, ד"ר יוסף שטראוס

❖ הוראות המבחן

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 3 **(שלוש)** שאלות מתוך 5 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: .http://www.hit.ac.il/acc/eugene.kanzieper/teaching/ps/ps.htm
5. מותר להיעזר במחשבון.
6. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1



מהעיגול בעל רדיוס R נגזרה גזרה בעלת זווית מרכזית α (ראה/י ציור). בהנחה כי R ו— α מהווים משתנים מקריים רציפים ובלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $R \sim \mathrm{U_c}(0,1)$ ו— $\alpha \sim \mathrm{U_c}(0,2\pi)$,

א. מצא/י את פונקצית הצפיפות $f_S(t)$ של שטח הגזרה ושרטט אותה.

ב. חשב/י את התוחלת $\mathrm{E}[S]$ של שטח הגזרה.

ג. מצא/י את ההסתברות $P\left(S \le \frac{1}{6}\mathrm{E}[S]\right)$.

❖ שאלה מס' 2

יהיה X_t משתנה מקרי בדיד המתאר את מספר הפניות המגיעות למוקד טלפוני בפרק הזמן $(0,t)$. כמו כן, נגדיר את סידרת המשתנים המקריים הרציפים $\{T_k\}$ המתארים את זמן ההמתנה עד הפנייה ה— k (כאן, $k = 1, 2, 3,...$).

א. תן/תני הוכחה מפורטת כי תוחלת הזמן בין שתי פניות סמוכות $\mathrm{E}[T_{k+1} - T_k]$ נתונה על ידי הנוסחא $\mathrm{E}[T_{k+1} - T_k] = \int_0^\infty dt \cdot P(X_t = k)$ בה $P(X_t = k)$ היא פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי X_t.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

ב. חשב/י את התוחלת $\mathrm{E}[T_{k+1}-T_k]$ עבור שני מוקדים המתוארים על ידי פונקציות הסתברות

ב/1: $$P(X_t=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp(-\lambda t)$$

ב/2: $$P(X_t=k)=\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k+1)!}\left[(2k+1)+\lambda t\right]\exp(-\lambda t)$$

❖ **<u>שאלה מס' 3</u>**

משתנה מקרי X מתואר על ידי פונקצית צפיפות ההסתברות $f_X(x)=\frac{1}{2}|x|\exp(-|x-a|)$. כאן, $a\geq 0$.

א. מצא/י את הפרמטר a.

ב. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)=P(X\leq t)$.

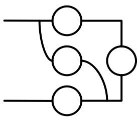
ג. חשב/י את התוחלת $\mu_m=E\left[X^m\right]$ עבור כל m חיובי שלם.

<u>הערה</u>. אינטגרל לידיעתך: $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty dt\ t^\alpha\exp(-t)$.

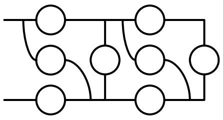
❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

מתוך הכד בו נמצאים D כדורים אדומים ו—$(N-D)$ כדורים שחורים הוצאו באקראי וללא החזרה n כדורים ($1\leq n\leq N$). לאחר שהוחלפו צבעי הכדורים שנלקחו (כל כדור אדום נצבע בצבע שחור וכל כדור שחור נצבע בצבע אדום), הוחזרו n הכדורים (בצבעים חדשים) חזרה לכד. במצב החדש נלקחו, <u>בלי החזרה</u>, שני כדורים מהכד. מהי ההסתברות ששניהם יהיו בצבע אדום?

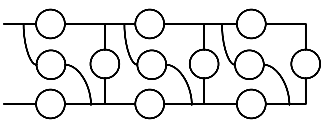
❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**



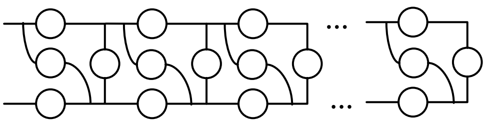
Q_1



Q_2



Q_3



Q_n

נתבונן בסדרת המעגלים Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n המורכבים משלוש, שש, תשע, ..., $4n$ יחידות הפועלות ללא תלות בהסתברות p. נסמן ב—$P(Q_j)$ את ההסתברות שהמעגל Q_j פועל.

א. מצא/י את ההסתברויות $P(Q_1)$ ו—$P(Q_2)$.

ב. תן/תני <u>הוכחה מפורטת</u> של המשוואה $P(Q_n)=P(Q_1)+p^2(1-p)^2\cdot P(Q_{n-1})$.

ג. באמצעות המשוואה הנ"ל, מצא/י את ההסתברות $P(Q_\infty)=\lim_{n\to\infty}P(Q_n)$.

בהצלחה!

PROBLEM #1

RANDOM VARIABLES: $R \sim U_c(0,1)$ AND $\alpha \sim U_c(0, 2\pi)$ ARE INDEPENDENT OF EACH OTHER

AREA OF A SECTOR $S = \frac{R^2 \alpha}{2}$.

A. TO DETERMINE THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION $f_S(t)$, WE FIRST CALCULATE THE CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION $F_S(t) = P(S \le t)$, AND THEN USE THE RELATION

$$f_S(t) = \frac{d}{dt} F_S(t).$$

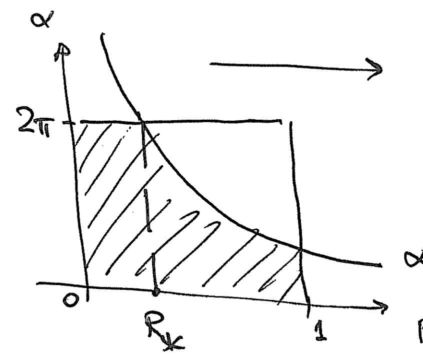
ONE HAS:

$$|\Omega| = 2\pi$$

$$F_S(t) = P\left(\frac{R^2\alpha}{2} \le t\right) = P\left(\alpha \le \frac{2t}{R^2}\right) = \frac{\left|\left\{\alpha \le \frac{2t}{R^2}\right\}\right|}{|\Omega|};$$

CASE 1: $t < 0 \Rightarrow F_S(t)\Big|_{t<0} = 0$. !

CASE 2:



THIS CASE CORRESPONDS TO THE SITUATION OF PLACING R_* BETWEEN 0 AND 1:

$$0 \le R_* = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \le 1$$

$$\boxed{0 \le t < \pi}$$

CASE 2

$$\frac{2t}{R_*^2} = 2\pi \Rightarrow R_* = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

THEN, $\left|\left\{\alpha \le \frac{2t}{R^2}\right\}\right| = 2\pi \cdot R_* + 2t \int_{R_*}^{1} \frac{dR}{R^2} =$

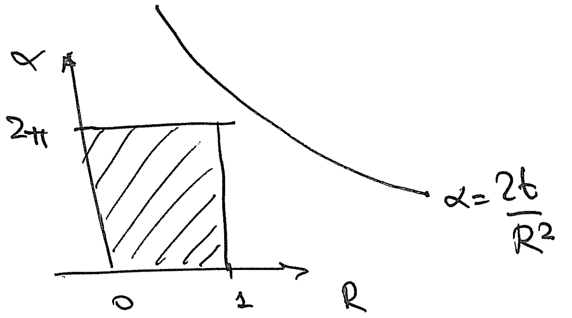
$$= 2\pi\sqrt{\frac{t}{\pi}} + 2t\left(\frac{1}{R_*} - 1\right) = 2\pi\sqrt{\frac{t}{\pi}} + 2t\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} - 1\right).$$

CONSEQUENTLY,

$$F_S(t)\Big|_{0 \le t < \pi} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(2 - \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right). \ !$$

CASE 3 :

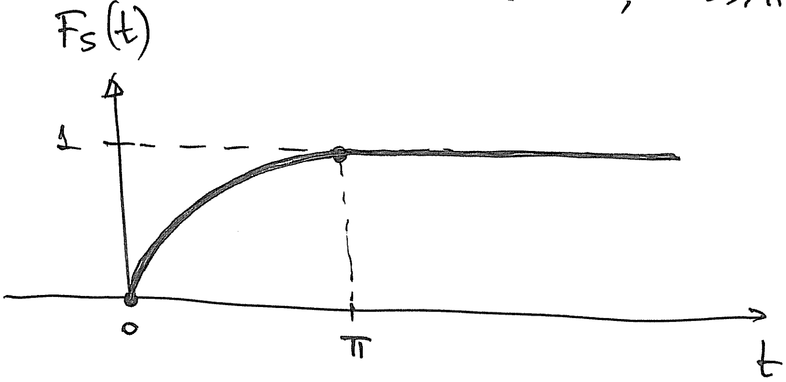
$t \geq \pi$



$\Longrightarrow F_S(t) = 1.$!

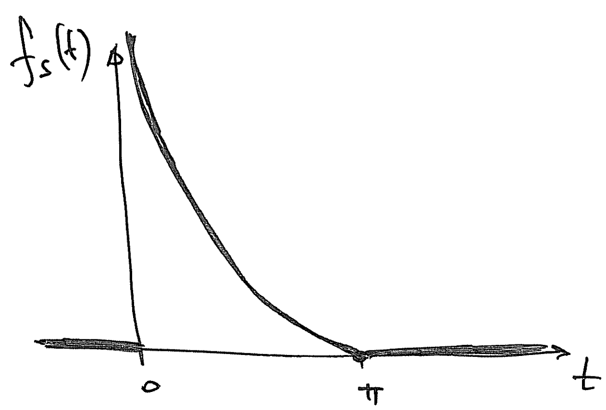
IN SUMMARY,

$$F_S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(2 - \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right), & 0 \leq t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}$$!



TO DETERMINE $f_S(t)$, ONE HAS TO DIFFERENTIATE:

$$f_S(t) = \frac{d}{dt} F_S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} - 1\right), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$!



B. $E[S] = E\left[\frac{R^2\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}E[R^2]E[\alpha]$.

SINCE $\alpha \sim U_c(0, 2\pi)$, WE HAVE $E[\alpha] = \frac{0+2\pi}{2} = \pi$.

SINCE $R \sim U_c(0,1)$, WE HAVE:

$$E[R^2] = \int_0^1 dR \cdot R^2 = \frac{1}{3}.$$

ALL IN ALL: $E[S] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi = \frac{\pi}{6}$. !

ALTERNATIVELY, THE SAME MEAN CAN BE CALCULATED AS FOLLOWS:

$$E[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot t \cdot f_S(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dt \cdot t \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_0^{\pi} dt \cdot \sqrt{t}}_{\frac{2}{3}t^{3/2}\big|_0^{\pi} \Downarrow \frac{2}{3}\pi^{3/2}} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} dt \cdot t}_{\frac{t^2}{2}\big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{3}\pi^{3/2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{6}. !$$

C. $P\left(S \leq \frac{1}{6}E[S]\right) = P\left(S \leq \frac{\pi}{36}\right) = F_S\left(t = \frac{\pi}{36}\right) =$

$$= \sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(2 - \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{36}} = \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}.$$

PROBLEM #2

A. WE SHALL USE THE STANDARD FORMULAE: (AND NOTATION):

$$F_{T_k}(t) = P(T_k \le t) = 1 - P(T_k > t)$$

HERE,

$$P(T_k > t) = \sum_{j=0}^{k-1} P(X_t = j).$$

COMBINING ABOVE TOGETHER, WE HAVE:

$$F_{T_k}(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} P(X_t = j). \qquad (*)$$

CONSEQUENTLY,

$$F_{T_{k+1}}(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k} P(X_t = j). \qquad (**)$$

CALCULATING THE DIFFERENCE, WE HAVE:

$$F_{T_k}(t) - F_{T_{k+1}}(t) = P(X_t = k).$$

DIFFERENTIATING IT, ONE DERIVES:

$$f_{T_k}(t) - f_{t_{k+1}}(t) = \frac{d}{dt} P(X_t = k).$$

NOW, WE ARE READY TO CALCULATE $E[T_{k+1} - T_k]$.

BY DEFINITION

$$E[T_{k+1}] - E[T_k] = \int_0^\infty dt \cdot t\, f_{T_{k+1}}(t) - \int_0^\infty dt \cdot t\, f_{T_k}(t)$$

$$= \int_0^\infty dt \cdot t \,[\underbrace{f_{T_{k+1}}(t) - f_{T_k}(t)}_{-\frac{d}{dt} P(X_t = k)}] = -\int_0^\infty dt \cdot t \cdot \frac{d}{dt} P(X_t = k).$$

INTEGRATING BY PARTS, WE DERIVE:

$$E[T_{k+1}]-E[T_k] = \underbrace{-t\cdot P(X_t=k)\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty dt\, P(X_t=k)$$

HENCE,

$$\boxed{E[T_{k+1}]-E[T_k] = \int_0^\infty dt\, P(X_t=k).}$$

END OF PROOF.

B.

B1. FOR $P(X_t=k)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, WE HAVE:

$$E[T_{k+1}]-E[T_k]=\frac{1}{k!}\int_0^\infty dt\cdot(\lambda t)^k e^{-\lambda t} = \langle \xi=\lambda t\rangle =$$

$$= \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty d\xi\, \xi^k e^{-\xi}}_{\Gamma(k+1)=k!} = \frac{k!}{k!}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

B2. FOR $P(X_t=k)=\dfrac{(\lambda t)^{2k}}{(2k+1)!}[(2k+1)+\lambda t]e^{-\lambda t}$, WE HAVE.

$$E[T_{k+1}]-E[T_k]=\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^\infty dt\cdot(\lambda t)^{2k}[(2k+1)+\lambda t]e^{-\lambda t}=$$

$$=\langle\xi=\lambda t\rangle=\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty d\xi\cdot\xi^{2k}[(2k+1)+\xi]e^{-\xi}=$$

$$=\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\left\{(2k+1)\underbrace{\int_0^\infty d\xi\cdot\xi^{2k}e^{-\xi}}_{\Gamma(2k+1)=(2k)!}+\underbrace{\int_0^\infty d\xi\cdot\xi^{2k+1}e^{-\xi}}_{\Gamma(2k+2)=(2k+1)!}\right\}$$

$$=\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\left\{(2k+1)!+(2k+1)!\right\}=\frac{2}{\lambda}.$$

PROBLEM #3

A. $f_X(x) = \frac{1}{2}|x|\, e^{-|x-a|}$.

To determine the parameter a, WE USE THE NORMALISATION CONDITION:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_X(x) = 1.$$

SPECIFICALLY, WE HAVE:

$$1 = \int_{-\infty}^{0} dx\, \frac{1}{2}(-x)\, e^{-(a-x)} + \int_{0}^{a} dx\, \frac{1}{2} x\, e^{-(a-x)} + \int_{a}^{\infty} dx\, \frac{1}{2} x\, e^{-(x-a)}$$

CALCULATING THE INTEGRALS [SEE EXAM, THIS YEAR, FIRST TRIAL], WE DERIVE:

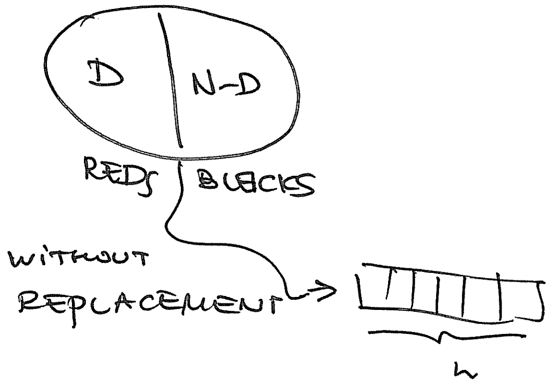
$$e^{-a} + a = 1 \implies a = 0.$$ [AGAIN, SEE THE PREVIOUS TRIAL].

B. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} dx\, f_X(x) = \int_{-\infty}^{t} dx\, \frac{1}{2}|x|\, e^{-|x|}$.

THE CALCULATION IS IDENTICAL TO THAT IN EXAM OF THE FIRST TRIAL.

C. THE SAME REMARK PERTAINS.

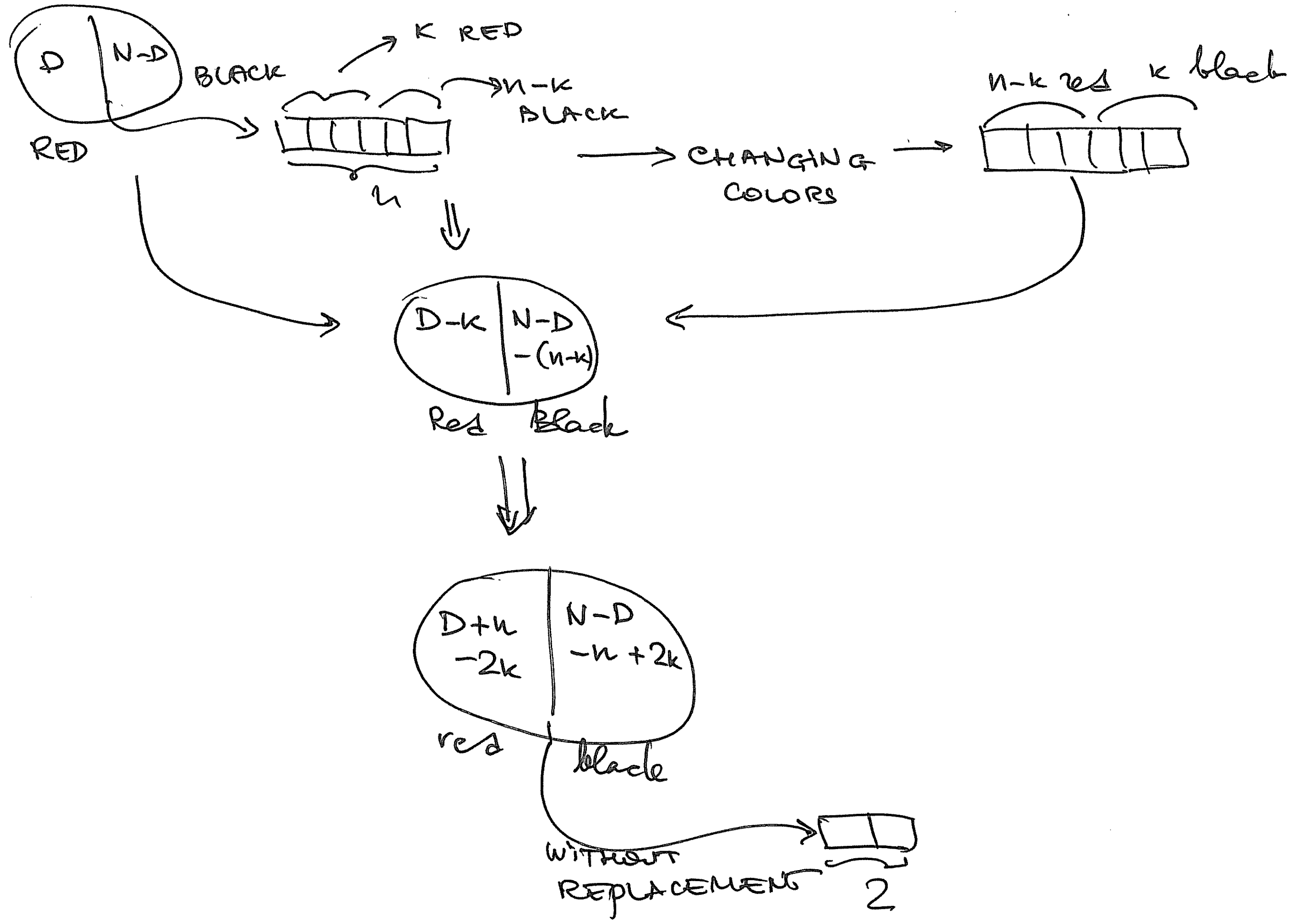
PROBLEM #4



$X \sim Hyp(N, D, n)$.

DEFINE A RANDOM VARIABLE $X = \{$NUMBER OF RED BALLS OUT OF n BALLS THAT WERE DRAWN WITHOUT REPLACEMENT$\}$.

ASSUMING $X = k$, WE HAVE



$$P(RR / X=k) = \frac{D+n-2k}{N} \cdot \frac{D+n-2k-1}{N-1}.$$

THE TOTAL PROBABILITY THEOREM TELLS US THAT

$$P(RR) = \sum_{k=0}^{n} P(RR / X=k)\, P(X=k) =$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{n} (D+n-2k)(D+n-2k-1)\, P(X=k)$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \Big[\sum_{k=0}^{n} (D+n)(D+n-1)\, P(X=k) + 4 \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k)$$

$$- 2(2D+2n-1) \sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k) \Big] =$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \Big[(D+n)(D+n-1) \cdot 1 + 4E[X^2] -$$

$$- 2(2D+2n-1)\, E[X] \Big].$$

SINCE, $E[X^2] = Var[X] + (E[X])^2$, WE EVENTUALLY DERIVE:

$$P(RR) = \frac{1}{N(N-1)} \Big\{ (D+n)(D+n-1) - 2(2D+2n-1)E[X]$$

$$+ 4 Var[X] + 4 (E[X])^2 \Big\}.$$

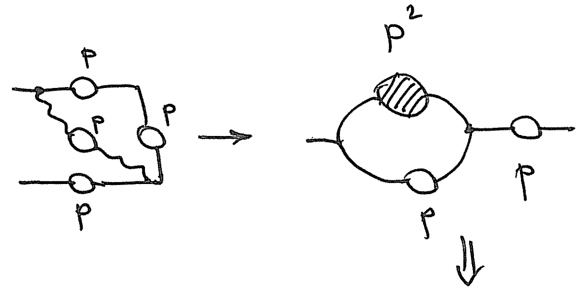
HERE,

$$E[X] = \frac{nD}{N} \quad \text{AND}$$

$$Var[X] = n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

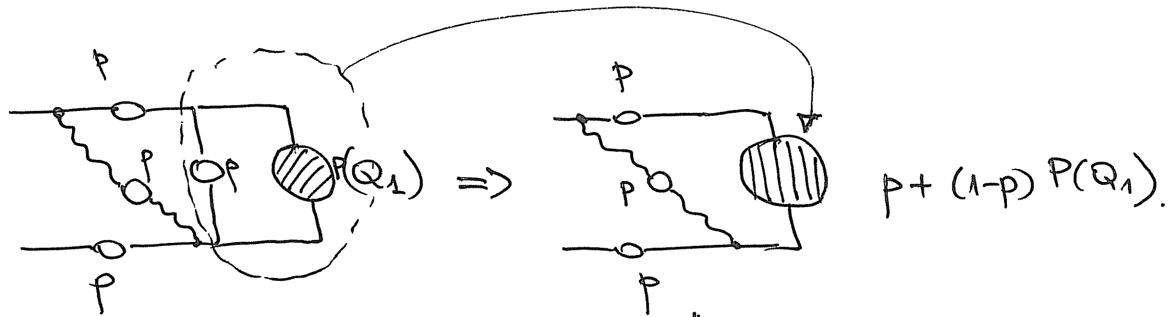
PROBLEM #5

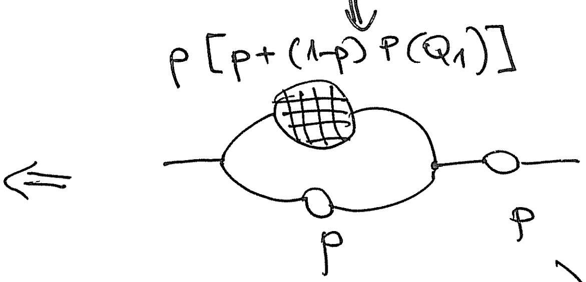
A. Q_1 :



$$P(Q_1) = p \cdot \left[p^2 + p - p^3 \right] = p^2 \left[1 + p - p^2 \right].$$

Q_2 :





$$P(Q_2) = \Big(p + p\left[p + (1-p)P(Q_1)\right] - p^2\left[p + (1-p)P(Q_1)\right] \Big) p =$$

$$= p^2 \Big(1 + p + (1-p)P(Q_1) - p^2 - p(1-p)P(Q_1) \Big)$$

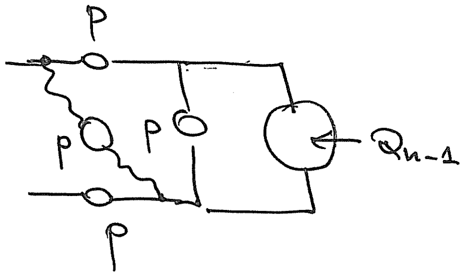
$$= \underbrace{p^2(1+p-p^2)}_{P(Q_1)} + p^2(1-p)^2 P(Q_1).$$

Hence,

$$P(Q_2) = \left[1 + p^2 (1-p)^2 \right] P(Q_1).$$

B.

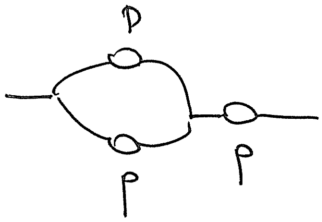
$Q_n =$



ONE MAY WRITE:

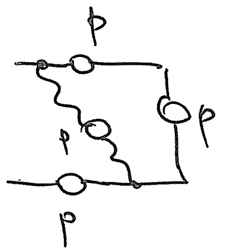
$$P(Q_n) = P(Q_n / Q_{n-1})\, P(Q_{n-1}) + P(Q_n / \bar{Q}_{n-1})\, P(\bar{Q}_{n-1}).$$

<u>Q_n / Q_{n-1}:</u>



$$\Rightarrow P(Q_n / Q_{n-1}) = p^2(2-p).$$

<u>$Q_n / \bar{Q}_{n-1}$:</u>



$$\Rightarrow P(Q_n / \bar{Q}_{n-1}) = P(Q_1)$$

HENCE,

$$P(Q_n) = p^2(2-p)\, P(Q_{n-1}) + P(Q_1)\left[1 - P(Q_{n-1})\right].$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(Q_n) = P(Q_1) + p^2(1-p)^2\, P(Q_{n-1}).}$$

B. To determine P_∞, WE DEDUCE FROM THE PREVIOUS FORMULA:

$$P_\infty = P(Q_1) + p^2(1-p)^2 P_\infty.$$

WHENCE WE OBTAIN:

$$P_\infty = \frac{P(Q_1)}{1 - p^2(1-p)^2} = \frac{p^2}{1+p^2-p}.$$