מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 12.03.2009
ט"ז בְּאַדָר תשס"ט
סמסטר א' מועד ב'

מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
מרצים: ד"ר עופר מלמד, פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות המבחן

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1

אורכם (X ו— Y) של שני חוטים הם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה רציפה: $X \sim \mathrm{U_c}(0, L_1)$ ו— $Y \sim \mathrm{U_c}(0, L_2)$. יהיה Z אורכו של החוט שמורכב משני החוטים הנ"ל. בהנחה כי $L_1 > L_2$,

א. מצא/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_Z(t)$ של משתנה מקרי Z.

ב. חשב/י את פונקצית צפיפות ההסתברות $f_Z(t)$.

ג. מצא/י את התוחלת $E[Z]$ ואת השונות $\mathrm{var}[Z]$.

❖ שאלה מס' 2

כמה מספרים שונים בני שמונה ספרות ניתן להרכיב מהספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 כך ששלוש הספרות הראשונות משמאל תהיינה מסודרות בסדר עולה ושלוש הספרות האחרונות מימין תהיינה מסודרות בסדר יורד? אסור להשתמש באותה סיפרה יותר מפעם אחת!

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

❖ **<u>שאלה מס' 3</u>**

משתנה מקרי X מתואר על ידי פונקצית צפיפות ההסתברות $f_X(x) = a\,|x|^b \exp(-x^2) + c$.

א. מצא/י את הפרמטרים a, b ו—c במידה והשונות $\mathrm{var}[X]=1$.

ב. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$ ושרטט/י אותה.

❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

יהיו X_1 , X_2 , ..., X_m משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה בדידה: $X_j \sim \mathrm{U}_d(1,N)$.

א. מצא/י את ההסתברות $P(X_j = \mathrm{even})$ שהמשתנה X_j מקבל ערך זוגי.

ב. מצא/י את ההסתברות כי הסכום $X = \sum_{j=1}^{m} X_j$ מקבל ערך זוגי.

❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**

נתבונן בביטוי המתקבל לאחר פתיחת הסוגריים ב— $\left(t^2 + \frac{a}{t} - b\right)^6$. מהו המקדם $C_{a,b}$ באיברים מהסוג $C_{a,b}\, t$?

<u>הערה</u>: עליך להשתמש בנוסחא המולטינומית.

❖ **<u>שאלה מס' 6</u>**

נתונים חמש תצפיות מאוכלוסיה נורמלית: $X_1 = 20$, $X_2 = 18$, $X_3 = 20$, $X_4 = 22$ ו—$X_5 = 25$.

א. מהו אומדן לתוחלת? מהו אומדן לסטיית התקן?

ב. מצא/י את רווח הסמך לתוחלת ברמת סמך של 95% .

ג. מצא/י את רווח הסמך לסטיית התקן באותה רמת סמך.

בהצלחה!

פתרונות

למבחן בהסתברות

וסטטיסטיקה

מועד ב'

12.03.09.

PROBLEM No 1

$X \sim U_c(0, L_1)$

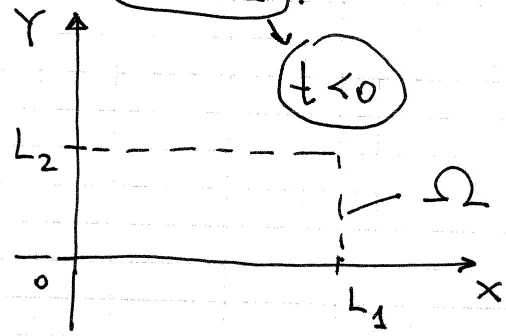
$Y \sim U_c(0, L_2)$

$Z = X + Y$

$L_1 > L_2$

A. $F_Z(t) = P(X+Y \leq t) = \dfrac{|\{X+Y \leq t\}|}{|\Omega|}$

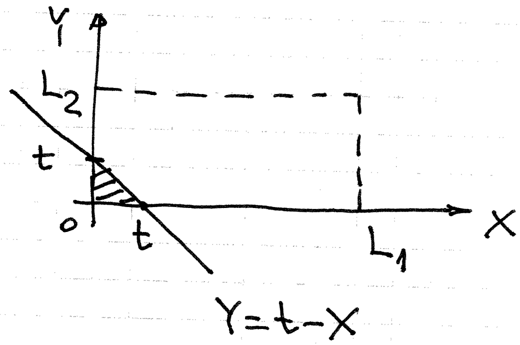
CASE I: $t < 0$



$|\Omega| = L_1 L_2.$

$|\{X+Y \leq t\}| = 0. \Rightarrow F_Z(t) = 0.$

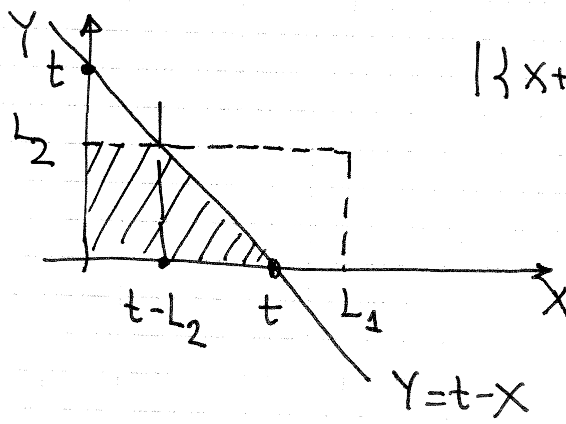
CASE II: $0 \leq t < L_2$



$|\{X+Y \leq t\}| = \dfrac{t^2}{2}$

$\Rightarrow F_Z(t) = \dfrac{t^2}{2 L_1 L_2}$

CASE III: $L_2 \leq t < L_1$



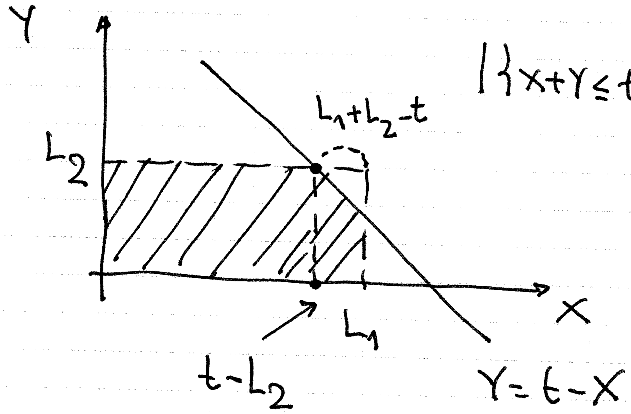
$|\{X+Y \leq t\}| = L_2(t - L_2) + \frac{1}{2} L_2 \cdot L_2$

$= L_2\left(t - \frac{L_2}{2}\right)$

$\Downarrow$

$F_Z(t) = \dfrac{t}{L_1} - \dfrac{L_2}{2L_1}$

CASE IV. $L_1 \leq t < L_1 + L_2$



$$|\{X+Y \leq t\}| = L_1 L_2 - \frac{1}{2}(L_1+L_2-t)^2$$

$$\Downarrow$$

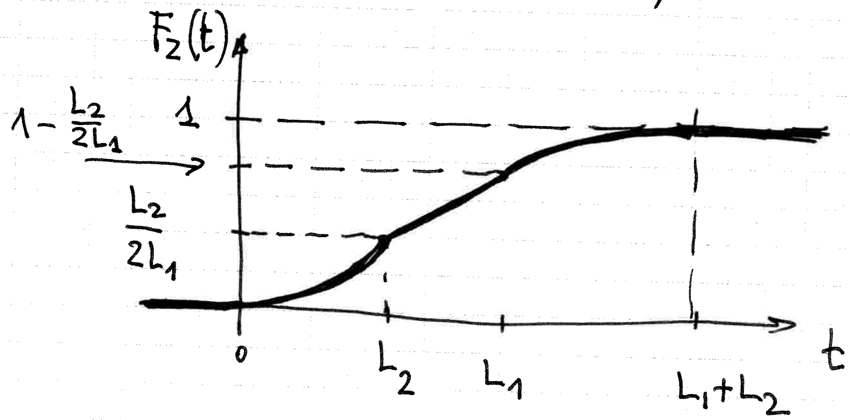
$$F_2(t) = 1 - \frac{1}{2L_1L_2}(L_1+L_2-t)^2$$

CASE V: $t \geq L_1 + L_2$

$$|\{X+Y \leq t\}| = L_1 L_2 \Rightarrow F_2(t) = 1.$$

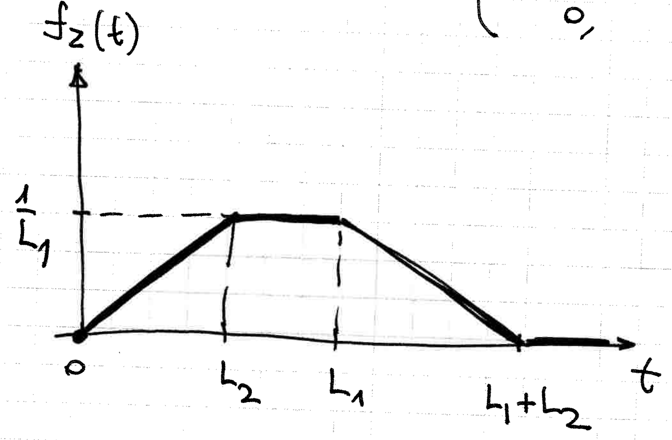
ANSWER:

$$F_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2L_1L_2}, & 0 \leq t < L_2 \\ \dfrac{t}{L_1} - \dfrac{L_2}{2L_1} & L_2 \leq t < L_1 \\ 1 - \dfrac{(t-L_1-L_2)^2}{2L_1L_2}, & L_1 \leq t < L_1+L_2 \\ 1, & t \geq L_1+L_2 \end{cases}$$



B.

$$f_Z(t) = \frac{dF_Z(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{t}{L_1 L_2}, & 0 \le t < L_2 \\ \frac{1}{L_1}, & L_2 \le t < L_1 \\ \frac{L_1+L_2-t}{L_1 L_2}, & L_1 \le t < L_1+L_2 \\ 0, & t \ge L_1+L_2 \end{cases}$$



C. $E[Z] = E[X+Y] = E(X) + E(Y) =$

$$= \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2} = \frac{L_1+L_2}{2}.$$

$Var[Z] = Var[X+Y] = Var X + Var Y =$

$$= \frac{L_1^2}{12} + \frac{L_2^2}{12} = \frac{L_1^2+L_2^2}{12}.$$

PROBLEM No 2

THE MULTIPLICATION RULE SAYS:

$$\left(\frac{P_{10}^{3}}{3!} - \frac{P_{9}^{2}}{2!}\right) \cdot P_{7}^{2} \cdot \frac{P_{5}^{3}}{3!} = 35{,}280.$$

PROBLEM No 3

$$f_X(x) = a|x|^b e^{-x^2} + c.$$

A. NORMALISATION BRINGS: $\boxed{c=0}$ AND

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a|x|^b e^{-x^2}\,dx = 2a\int_0^{\infty} dx\cdot x^b e^{-x^2} = 1.$$

SIMPLE REPLACEMENT $t = x^2$ (SO THAT $x = \sqrt{t}$ AND $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$) YIELDS:

$$1 = 2a\int_0^{\infty} dx\cdot x^b e^{-x^2} = 2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{2\sqrt{t}}\, t^{\frac{b}{2}} e^{-t} =$$

$$= a\int_0^{\infty} dt\cdot t^{\frac{b-1}{2}} e^{-t} = a\,\Gamma\left(\frac{b-1}{2}+1\right) = a\,\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right).$$

AT THE SAME TIME, $\operatorname{Var} X = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$,

AND

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\cdot x\cdot f_X(x) \equiv 0.$$

HENCE,

$$1 = \operatorname{Var} X = a\int_{-\infty}^{+\infty} dx\cdot x^2\, x^b e^{-x^2} =$$

$$= a\int_0^{\infty} dt\cdot t^{\frac{b+1}{2}} e^{-t} = a\,\Gamma\left(\frac{b+1}{2}+1\right).$$

THE TWO EQNS TO BE SOLVED TOGETHER ~~ARE~~:

$$\begin{cases} a\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)=1 \\ a\Gamma\left(\frac{b+1}{2}+1\right)=1 \end{cases}$$

DUE TO THE PROPERTY $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ WE HAVE:

$$1=\frac{a\Gamma\left(\frac{b+1}{2}+1\right)}{a\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}=\frac{a\cdot\frac{b+1}{2}\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}=\frac{b+1}{2}$$

WHENCE $\boxed{b=1}$; AS THE RESULT, $\boxed{a=1}$ TOO.

ANSWER: $a=1,\ b=1,\ c=0.$

$$f_X(x)=|x|e^{-x^2}$$

B. $F_X(t)=\int_{-\infty}^{t}dx\,|x|e^{-x^2}$.

$$F_X(t)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{t}dx\,|x|e^{-x^2}=-\int_{-\infty}^{t}dx.x.e^{-x^2}, & t<0\\ \frac{1}{2}+\int_{0}^{t}dx.x.e^{-x^2}, & t\geq 0.\end{cases}$$

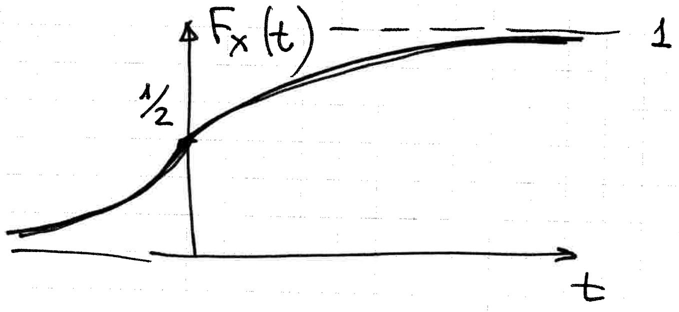
SINCE:

$$\int_{-\infty}^{t}dx.xe^{-x^2}\overset{t<0}{=\!=}\frac{1}{2}-\int_{t}^{0}dx.xe^{-x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}\right)=\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

$$\frac{1}{2}+\int_{0}^{t}dx.xe^{-x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-t^2}\right)=1-\frac{1}{2}e^{-t^2},$$

WE CONCLUDE:

$$F_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-t^2}, & t<0.\\ 1-\frac{1}{2}e^{-t^2}, & t\geq 0.\end{cases}$$



Problem No 4

$$X_j \sim U_d(1,N).$$

A. $$P(X_j = \text{even}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1+(-1)^k}{2} P(X_j = k) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} P(X_j=k)}_{\substack{1 \\ \text{(NORMALISATION)}}} + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} \frac{(-1)^1\left[1-(-1)^N\right]}{1-(-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1-(-1)^N}{4N}.$$

So,

$$P(X_j = \text{even}) = \frac{1}{2} - \frac{1-(-1)^N}{4N} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{if } N = \text{even} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}, & \text{if } N = \text{odd} \end{cases}$$

B. One has [see Problem 4C, Trial Aleph]:

$$P(X_1 + .. + X_m = \text{even}) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(2P(X_j = \text{even}) - 1\right)^m\right]$$

Hence,

$$P(X_1 + ... + X_m = \text{even}) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{(-1)^N - 1}{2N}\right)^m\right].$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{if } N = \text{even} \\ \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(-1)^m}{N^m}\right], & \text{if } N = \text{odd}. \end{cases}$$

PROBLEM No 5

$$\left(t^2+\frac{a}{t}-b\right)^6 = \sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0\\ n_3\geq 0\\ \overline{n_1+n_2+n_3=6}}} \frac{6!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\, t^{2n_1}\, \frac{a^{n_2}}{t^{n_2}}\,(-b)^{n_3} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0}} \frac{6!\; a^{n_2}\,(-b)^{6-n_1-n_2}}{n_1!\,n_2!\,(6-n_1-n_2)!}\; t^{\,2n_1-n_2}$$

To find the terms of the form $C_{ab}t^1$, we put $2n_1-n_2=1 \Rightarrow n_2=2n_1-1$ to get:

$$\rightarrow \sum_{n_1\geq 1} \frac{6!\; a^{2n_1-1}\;(-b)^{7-3n_1}}{n_1!\,(2n_1-1)!\,(7-3n_1)!}\cdot t$$

$\underline{n_1=1}$: $\quad \frac{6!}{4!}\, a\,(-b)^4 = 30ab^4.$

$\underline{n_1=2}$: $\quad \frac{6!}{2!\,3!}\, a^3\,(-b)^1 = -60a^3b.$

__ANSWER__:

$$C_{ab} = 30ab^4 - 60a^3b.$$

PROBLEM No 6

A. $\overline{X}_{(5)} = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} x_j = 21$

$$\hat{S}_{(5)} = \sqrt{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{5}\left(x_j - \overline{X}_{(5)}\right)^2} = \sqrt{7} \simeq 2.65.$$

B. $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$\overline{X}_{(5)} - \frac{\hat{S}_{(5)}}{\sqrt{5}} t_{0.025}^{(4)} < \mu < \overline{X}_{(5)} + \frac{\hat{S}_{(5)}\, t_{0.025}(4)}{\sqrt{5}}.$$

$$t_{0.025}(4) = 2.776$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{17.71 < \mu < 24.29}$$

C. $$\frac{2\hat{S}_{(5)}}{\sqrt{\chi^2_{0.025}(4)}} < \sigma < \frac{2\hat{S}_{(5)}}{\sqrt{\chi^2_{0.975}(4)}}$$

$$\chi^2_{0.025}(4) = 11.143 \; ; \sqrt{} = 3.34$$

$$\chi^2_{0.975}(4) = 0.484 \; ; \sqrt{} = 0.70$$

$$\boxed{1.59 < \sigma < 7.57.}$$