מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 22.10.2008
כ' בְּתִשְׁרֵי תשס"ט
סמסטר ג', מועד א'

<u>מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019</u>
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות המבחן

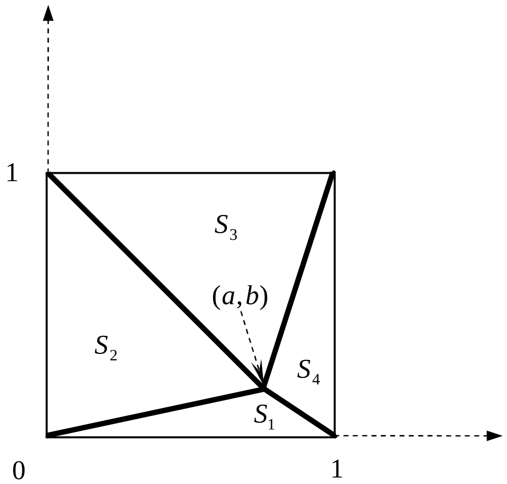
1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. <u>נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.</u>
4. <u>חומר עזר מוגבל</u> – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ <u>שאלה מס' 1</u>

נקודה (a,b) בתוך הריבוע נבחרה באופן מקרי כך ש— $a \sim \mathrm{U_c}(0,1)$ ו— $b \sim \mathrm{U_c}(0,1)$. יהיו S_1, S_2, S_3 ו— S_4 שטחים של המשולשים שנוצרו (ראה/י את הציור). בהנחת אי התלות בין משתנים מקריים a ו— b מצא/י את ההסתברות

$$P(S_1 > S_2 > S_3 > S_4).$$



❖ <u>שאלה מס' 2</u>

נתבונן בקובייה מוטה בעלת הסתברות $P(X=k)=c\cdot p^{k-1}$ לקבלת התוצאה $X=k$ בהטלה בודדת (כאן, $k=1,...,6$).

א. מצא/י את הפרמטר c ואת התוחלת $E[X]$.

ב. מטילים קובייה מוטה זו פעמיים. מהי ההסתברות לקבלת סכום של שתי תוצאות השווה ל— 8 אם ידוע כי בהטלה הראשונה התקבל מספר זוגי?

<u>הערה</u>: $\sum_{j=j_1}^{j_2} q^j = \frac{q^{j_1}(1-q^{j_2-j_1+1})}{1-q}$.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

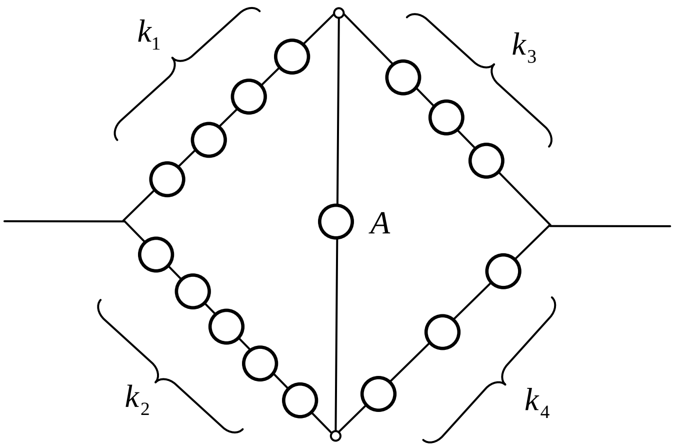
❖ **שאלה מס' 3**

נסמן ב— X_t את מספר הפניות המגיעות למוקד טלפוני בפרק הזמן $(0,t)$ ונסמן ב— T_1 את זמן ההמתנה עד הגעת הפנייה הראשונה. בהנחה כי פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי X_t נתונה על ידי הנוסחא $P\left(X_t = k\right) = \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k+1)!} e^{-\lambda t}\left[(2k+1)+\lambda t\right]$ עבור כל k שלם לא שלילי: $k \geq 0$,

א. מצא/י את פונקצית הצפיפות של המשתנה T_1 = {זמן המתנה עד הפניה הראשונה}.

ב. חשב/י את התוחלת $E[T_1]$ ואת השונות $\text{var}[T_1]$.

❖ **שאלה מס' 4**



מעגל חשמלי מורכב מ—$(k_1+k_2+k_3+k_4+1)$ יחידות הפועלות ללא תלות בהסתברות $0<p<1$. אם ידוע כי מעגל כולו פועל, מהי ההסתברות שהיחידה A פועלת?

❖ **שאלה מס' 5**

יהיה X משתנה מקרי רציף בעל פונקצית הצפיפות

$$f_X(x) = \frac{e-1}{e}\left(x+\frac{1}{e-1}\right)\ \exp(-x) .$$

המוגדרת עבור $x \geq 0$. נגדיר את המשתנה החדש $Y=[X]+2$ (כאן, $[X]$ מסמן ערך שלם של X).

הוכח/הוכיחי כי $Y \sim \text{NegBin}\left(p=1-\frac{1}{e}, m=2\right)$.

❖ **שאלה מס' 6**

חוקר בנה רווח סמך לתוחלת $95.82<\mu<104.18$ על סמך מדגם בעל $n=8$ תצפיות מאוכלוסיה נורמלית. בהנחה כי אומדן לשונות הוא $\hat{S}^2_{(8)}=25$, מצא/י את

א. ממוצע המדגם $\overline{X}_{(8)}$.

ב. רמת הסמך $1-\alpha$ בה השתמש החוקר.

בהצלחה!

SOLUTIONS TO THE EXAM IN PROBABILITY & STATISTICS

22.10.2008

PROBLEM No 1

SIMPLE GEOMETRY SAYS:

$$S_1 = \frac{b}{2}; \quad S_2 = \frac{a}{2}; \quad S_3 = \frac{1-b}{2}, \quad S_4 = \frac{1-a}{2}.$$

THE PROBABILITY TO BE CALCULATED IS

$$P(S_1 > S_2 > S_3 > S_4) = P(b > a > 1-b > 1-a) =$$

$$= P(\{b>a\} \cap \{b>1-a\} \cap \{a>b\}) \equiv 0.$$

PROBLEM No 2

A. THE NORMALISATION CONDITION $\sum_{k=1}^{6} P(X=k) = 1$ BRINGS:

$$c \cdot \sum_{k=1}^{6} p^{k-1} = c \cdot \frac{1-p^6}{1-p} = 1$$

HENCE, $\boxed{c = \frac{1-p}{1-p^6}}$

THE MEAN EQUALS:

$$E[X] = c \sum_{k=1}^{6} k p^{k-1} = c \frac{\partial}{\partial p} \sum_{k=1}^{6} p^k = c \frac{\partial}{\partial p} \frac{p(1-p^6)}{1-p} =$$

$$= \frac{6p^7 - 7p^6 + 1}{(1-p)(1-p^6)}.$$

B. WE ARE ASKED TO COMPUTE THE CONDITIONAL PROBABILITY:

$$P(X_1+X_2=8 / X_1=\text{even}) = \frac{P(X_1+X_2=8 \cap X_1=\text{even})}{P(X_1=\text{even})}.$$

HERE,

$$P(X_1=\text{even}) = P(X_1=2)+P(X_1=4)+P(X_1=6) =$$
$$= c\left[p+p^3+p^5\right] = \frac{(1-p)(p+p^3+p^5)}{1-p^6}.$$

$$P(X_1+X_2=8 \cap X_1=\text{even}) =$$
$$= P((2,6))+P((4,4))+P((6,2)) =$$
$$= c^2 \cdot p \cdot p^5 + c^2 \cdot p^3 \cdot p^3 + c^2 p^5 \cdot p = 3c^2 p^6 = \frac{3p^6(1-p)^2}{[1-p^6]^2}.$$

HENCE,

$$P(X_1+X_2=8 / X_1=\text{even}) \equiv \frac{3p^5}{1+p^2+p^4} \cdot \frac{(1-p)}{1-p^6}.$$

PROBLEM No 3

A. $f_{T_1}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_1}(t)$; $F_{T_1}(t) = 1 - P(X_t=0)$,

SO THAT

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t), \quad t \geq 0.$$

HENCE,

$$f_{T_1}(t) = \frac{d}{dt}\left[1-e^{-\lambda t}(1+\lambda t)\right] =$$
$$= \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{OTHERWISE} \end{cases}$$

B. THE MEAN:

$$E[T_1] = \int_0^\infty dt \cdot t\, f_{T_1}(t) = \lambda^2 \int_0^\infty dt \cdot t^2 e^{-\lambda t} =$$

$$= \left(\text{NEW INTEGRATION VARIABLE } \xi = \lambda t \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty d\xi \cdot \xi^2 e^{-\xi} = \frac{\Gamma(3)}{\lambda} = \frac{2!}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

THE VARIANCE:

$$Var[T_1] = E[T_1^2] - \left(E[T_1]\right)^2 = E[T_1^2] - \frac{4}{\lambda^2}.$$

$$E[T_1^2] = \int_0^\infty dt \cdot t^2 f_{T_1}(t) = \lambda^2 \int_0^\infty dt \cdot t^3 e^{-\lambda t} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty d\xi \cdot \xi^3 e^{-\xi} = \frac{\Gamma(4)}{\lambda^2} = \frac{3!}{\lambda^2} = \frac{6}{\lambda^2}.$$

HENCE,

$$Var[T_1] = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

PROBLEM No 4

$Q = \{\text{THE CIRCUIT FUNCTIONS}\}.$

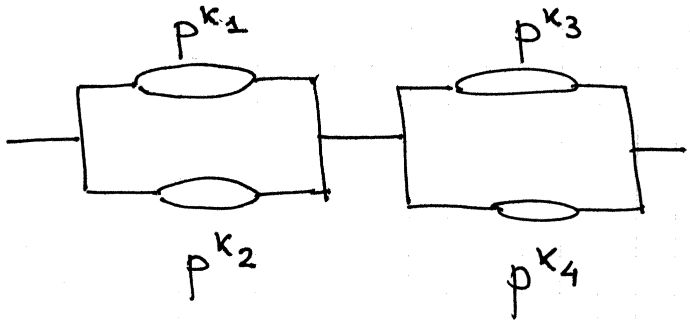
$A = \{\text{THE UNIT A FUNCTIONS}\}.$

LET US CALCULATE $P(A/Q)$:

$$P(A/Q) \overset{\text{Bayes}}{=\!=} \frac{P(Q/A)\,P(A)}{P(Q)} = p \cdot \frac{P(Q/A)}{P(Q)}.$$

HERE, $P(Q) = p\,P(Q/A) + (1-p)\,P(Q/\bar{A}).$

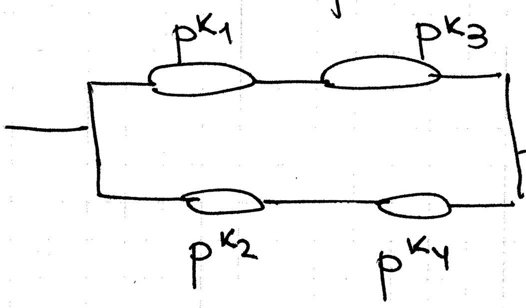
I. $P(Q/A)$ CORRESPONDS TO THE CIRCUIT:



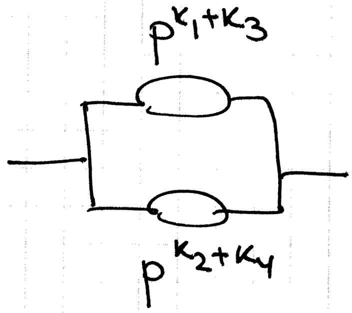
HENCE,

$$P(Q/A) = \left[p^{k_1} + p^{k_2} - p^{k_1+k_2}\right] \cdot \left[p^{k_3} + p^{k_4} - p^{k_3+k_4}\right].$$

II. $P(Q/\bar{A})$ CORRESPONDS TO THE CIRCUIT:



$\Rightarrow$



HENCE,

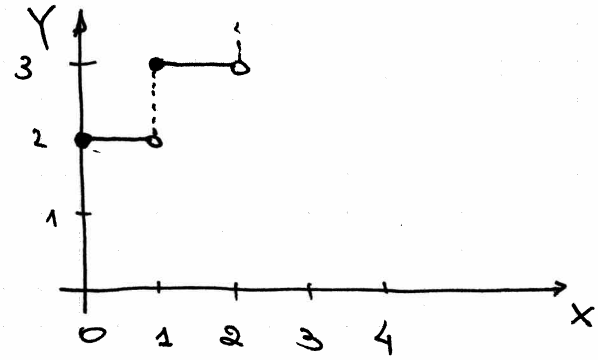
$$P(Q/\bar{A}) = p^{k_1+k_3} + p^{k_2+k_4} - p^{k_1+k_2+k_3+k_4}.$$

COMBINING EVERYTHING TOGETHER, WE DERIVE:

$$P(A/Q) = \frac{p \cdot \left[p^{k_1} + p^{k_2} - p^{k_1+k_2}\right]\left[p^{k_3} + p^{k_4} - p^{k_3+k_4}\right]}{p\left[p^{k_1} + p^{k_2} - p^{k_1+k_2}\right]\left[p^{k_3} + p^{k_4} - p^{k_3+k_4}\right] + (1-p) \cdot \left[p^{k_1+k_3} + p^{k_2+k_4} - p^{k_1+k_2+k_3+k_4}\right]}$$

PROBLEM No 5

ONE READILY OBSERVES THAT $Y = 2, 3, 4, \ldots$
THE PROBABILITY FUNCTION $P(Y=k)$ IS RELATED TO THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION $f_X(x)$ AS:



$$P(Y=k) = P(k-2 \le X < k-1)$$

HENCE,

$$P(Y=k) = \int_{k-2}^{k-1} dx\, f_X(x) = \frac{e-1}{e} \int_{k-2}^{k-1} dx \left(x + \frac{1}{e-1}\right) e^{-x} =$$

$$= (k-1)\left(1-\frac{1}{e}\right)^2 \left[1-\left(1-\frac{1}{e}\right)\right]^{k-2}.$$

THIS IS THE PROBABILITY FUNCTION OF THE NEGATIVE BINOMIAL VARIABLE WITH $p = 1-\frac{1}{e}$ AND $m=2$:

$$Y \sim \text{NegBin}\left(p = 1-\frac{1}{e}\,;\, m=2\right).$$

PROBLEM NO6

$$\bar{X}_{(n)} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\hat{S}_{(n)}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_{(n)} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\hat{S}_{(n)}}{\sqrt{n}}$$

FOR $n=8$, WE HAVE:

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}_{(8)} - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\hat{S}_{(8)}}{\sqrt{8}} &= 95.82 \\ \bar{X}_{(8)} + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\hat{S}_{(8)}}{\sqrt{8}} &= 104.18 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{X}_{(8)} = 100.$$

ON THE OTHER HAND,

$$2\,\frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(7)\cdot 5}{\sqrt{8}} = 8.36 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}(7) = 2.365$$

HENCE,

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$ (SEE THE TABLE OF t-DISTRIBUTION).

AS THE RESULT,

$$1-\alpha = 0.95.$$