מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

ת.ז.
000 000 000

תאריך: 24.08.08
שעה: 18:00
סמסטר ג' תשס"ח

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ **הורואות הבוחן**

1. **משך הבוחן:** 90 דקות.
2. **חלק ראשון:** עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
3. **חלק שני:** עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
4. **חומר עזר:** דף הנוסחאות המצורף. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה !!**

❖ חלק ראשון
יש לתת תשובות בטופס זה (משקל: 55 נק')

01. תן/תני הגדרות למונחים המפורטים בטבלה. [12 נק']

מונח	הגדרה
מרחב מדגם	אוסף של כל התוצאות האפשריות של הניסוי
גישה קלאסית להסתברות	גישה זו <u>לא קשורה לניסוי</u>. הסתברות של מאורע A כלשהו מחושבת כיחס בין מספר האופציות n_A להתרחשות של המאורע הנבחן A לבין מספר n של כל אופציות אפשריות: $P(A)=\frac{n_A}{n}$. גישה זו מניחה <u>סבירות שווה</u> של כל אחת מן התוצאות האפשריות.
משתנה מקרי בדיד	משתנה מקרי בדיד X על מרחב מדגם Ω הוא משתנה מקרי המקבל רק מספר סופי או בן מניה של ערכים

הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences
גולומב 52, ת.ד. 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619 | www.hit.ac.il

.02 המאורעות A ו—B אינם ריקים. האם הטענות הבאות נכונות? סמן/סמני ב-$\surd$ את הטענות הנכונות. [12 נק']

טענה	סמן/סמני כאן
אם A ו—B זרים, מתקיים: $P(A/B)=P(A)$	
אם A מוכל ב—B, מתקיים: $P(B/A)=P(B)-P(A)$	
אם A מוכל ב—B, מתקיים: $P(B/A)=1$	$\surd$
אם A מוכל ב—B, מתקיים: $P(A)\le P(B)$	$\surd$
אם A ו—B בלתי תלויים, מתקיים: $P(A/B)=P(A)$	$\surd$
אם A ו—B בלתי תלויים, מתקיים: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	

.03 נסח/י את המשפט להסתברות שלמה. [11 נק']

ניסוח:

אם $A_1, A_2, \dots, A_n$ הם מאורעות זרים בזוגות, כך ש-$A_i \cap A_j = \varnothing$ עבור כל זוג $i \neq j$,

ואיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, אזי לכל מאורע B מתקיים:

$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\cdot P(A_i)$.

.04 נתבונן בהסתברות $P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A)$. סמן/י ב-$\surd$ את הזהות הנכונה בהנחה כי המאורעות B_1 ו—B_2 הם מאורעות זרים. [12 נק']

ביטוי	סמן/י כאן
$P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A) = P(\overline{B_1}/A)P(\overline{B_2}/A)$	
$P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A) = \frac{P(A\cup B_1)+P(A\cup B_2)}{P(A)}$	
$P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A) = \frac{P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)}{P(A)}$	
$P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A) = 1-\frac{P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)}{P(A)}$	$\surd$
$P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A) = 1-\frac{P(A\cup B_1)+P(A\cup B_2)}{P(A)}$	
$P((\overline{B_1}\cap\overline{B_2})/A) = 1-P(B_1/A)P(B_2/A)$	

05. איך מפולגים משתנים מקריים שמוגדרים בטבלה? מצא/י את התוחלות של משתנים אלה. **[8 נק']**

הגדרות הניסוי והמשתנה	סוג ופרמטרים של ההתפלגות	$E[X]$
ניסוי: בחירה מקרית עם החזרה של שתי ספרות מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **משתנה:** X = {מספר הספרות המתחלקות ב-3 בין שתיים שנבחרו}	$Bin\left(2,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$
ניסוי: בחירה מקרית של סיפרה אחת מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **משתנה:** X = {סיפרה שנבחרת אקראית}	$U(1,9)$	5
ניסוי: בחירה מקרית וללא החזרה של שלוש ספרות מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **משתנה:** X = {מספר ספרות אי זוגיות בין שלוש שנבחרו}	$Hyp(9,5,3)$	$\frac{5}{3}$
ניסוי: בחירה מקרית עם החזרה של סיפרה מהסדרה {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **משתנה:** X = {מספר הבחירות עד קבלת סיפרה "5" בפעם השנייה}	$NB\left(\frac{1}{9},2\right)$	18

חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן (משקל: 45 נק')

06. מהי ההסתברות שבסדרת ניסוי ברנולי ההצלחה ה—m_1 תתרחש בניסוי ה—k_1 וההצלחה ה—m_2 תתרחש בניסוי ה—k_2 ? יש להניח כי $m_2 > m_1$ ו—$k_2 > k_1$. **[20 נק']**

פתרון. נגדיר שני משתנים מקריים: X_{m_1} = {מספר ניסוי ברנולי עד ההצלחה ה—m_1} ו—X_{m_2} = {מספר ניסוי ברנולי עד ההצלחה ה— m_2}. יש לחשב את ההסתברות $P(X_{m_1}=k_1, X_{m_2}=k_2)$:

$$P(X_{m_1}=k_1, X_{m_2}=k_2) = P(X_{m_1}=k_1 \cap X_{m_2}=k_2) = P(X_{m_2}=k_2 / X_{m_1}=k_1)\cdot P(X_{m_1}=k_1).$$

כיוון ש—$X_{m_1} \sim \text{NegBin}(m_1,p)$, מתקיים:

$$P(X_{m_1}=k_1) = C_{k_1-1}^{m_1-1} p^{m_1}(1-p)^{k_1-m_1}.$$

מצד שני, ניתן לראות כי

$$P(X_{m_2}=k_2 / X_{m_1}=k_1) = P(X_{m_2-m_1}=k_2-k_1) = C_{k_2-k_1-1}^{m_2-m_1-1} p^{m_2-m_1}(1-p)^{k_2-k_1-(m_2-m_1)}.$$

כתוצאה,

$$P(X_{m_1}=k_1, X_{m_2}=k_2) = P(X_{m_2}=k_2 / X_{m_1}=k_1)\cdot P(X_{m_1}=k_1) = C_{k_1-1}^{m_1-1} C_{k_2-k_1-1}^{m_2-m_1-1} p^{m_2}(1-p)^{k_2-m_2}$$

כאן, $m_2 > m_1$ ו—$k_2 > k_1$.

07. יוג'ין, טל ורועי מטילים קובייה מאוזנת לסירוגין. הראשון שיקבל את התוצאה "6" ינצח. מהי ההסתברות ש—

א. יוג'ין ינצח (הוא הראשון שמתחיל להטיל קובייה) ?
ב. טל ינצח (הוא מטיל קובייה אחרי יוג'ין) ?
ג. רועי ינצח (הוא מטיל קובייה אחרי טל) ?

[25 נק']

פתרון.

א. ניתן לרואת כי

$$P_{Eugene}=p+(1-p)^3p+(1-p)^6p+\ldots=p\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-p)^3\right]^k=\left.\frac{p}{1-(1-p)^3}\right|_{p=1/6}=\frac{6^2}{6^3-5^3}$$

באותה דרך נקבל:

ב.

$$P_{Tal}=(1-p)p+(1-p)^4p+(1-p)^7p+\ldots=(1-p)P_{Eugene}=\frac{5\cdot 6}{6^3-5^3}$$

ג.

$$P_{Roi}=(1-p)^2p+(1-p)^5p+(1-p)^8p+\ldots=(1-p)^2P_{Eugene}=\frac{5\cdot 5}{6^3-5^3}$$

❖ חלק שלישי:
נוסחאות לרשותך

חוקי הסתברות

- **חוק האיחוד:** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
- **חוק קומוטטיבי:** $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
- **חוק אסוציאטיבי:** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$,
  $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$.
- **חוק דיסטריבוטיבי:** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,
  $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
- **חוק דה מורגן:** $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

הסתברות מותנית וכו'

- **הסתברות מותנית:** $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. **משפט בייס:** $P(A/B)=\dfrac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$.

התפלגות אחידה: $X\sim \mathrm{U}_d(a,b)$, a ו- b מספרים שלמים

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k)=\dfrac{1}{b-a+1}$ עבור $k=a,a+1,\dots,b$.
- **תוחלת:** $E[X]=\dfrac{a+b}{2}$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X]=\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

התפלגות ברנולי: $X\sim \mathrm{Ber}(p)$, $0\le p\le 1$

- **פונקצית הסתברות:** $P_X(x)=\begin{cases}1-p, & x=0\\ p, & x=1\end{cases}$.
- **תוחלת:** $E[X]=p$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X]=p(1-p)$.

התפלגות בינומית: $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $0\le p\le 1$, n מספר שלם חיובי

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ עבור $k=0,1,\dots,n$.
- **תוחלת:** $E[X]=np$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X]=np(1-p)$.

התפלגות בינומית שלילית: $X \sim \mathrm{NegBin}(m,p)$, $0 \le p \le 1$, m מספר שלם חיובי

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k)=C_{m-1}^{k-1}p^m(1-p)^{k-m}$ עבור $k=m,m+1,\ldots$.
- **תוחלת:** $E[X]=\frac{m}{p}$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X]=\frac{m(1-p)}{p^2}$.

התפלגות היפרגיאומטרית: $X \sim \mathrm{Hyp}(N,D,n)$, $N \ge 2$, $1 \le D < N$ ו- $1 \le n \le N$

- **פונקצית הסתברות:** $P\left(X=k\right)=\frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$ עבור $0 \le k \le \min(n,D)$.
- **תוחלת:** $E\left[X\right]=n\frac{D}{N}$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X]=n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$.

התפלגות היפרגיאומטרית שלילית: $X_m \sim \mathrm{NegHyp}(m;N,D)$, $1 \le m \le D$, $N \ge 2$, $1 \le D < N$

- **פונקצית הסתברות:** $P(X_m=k)=C_{k-1}^{m-1}\frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}$
- **תוחלת:** $E[X_m]=m\frac{N+1}{D+1}$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X_m]=m\frac{N+1}{D+1}\frac{N-D}{D+2}\left(1-\frac{m}{D+1}\right)$

התפלגות פואסון: $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ עבור $k=0,\ldots,\infty$.
- **תוחלת:** $E[X]=\lambda$.
- **שונות:** $\mathrm{var}[X]=\lambda$.

מספר בחירות

	עם החזרה	**בלי החזרה**
מסודרת	n^k	$P_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$
לא מסודרת	$C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$