מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 19.11.2008
כ"א בְּחֶשְׁוָן תשס"ט
סמסטר ג', מועד ב'

מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

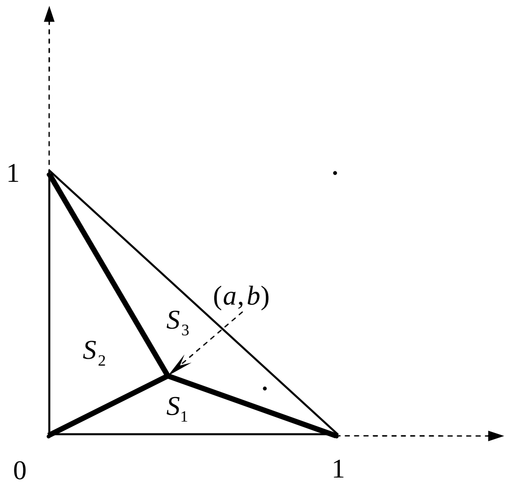
❖ הוראות המבחן

❶ משך המבחן 3 שעות.
❷ עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
❸ נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
❹ חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
❺ **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1

נקודה (a,b) נבחרה באופן מקרי כך ש— $a \sim \mathrm{U_c}(0,1)$ ו— $b \sim \mathrm{U_c}(0,1)$.



א. מהי ההסתברות למציאת הנקודה (a,b) בתוך המשולש?

ב. יהיו S_1, S_2 ו— S_3 שטחים של המשולשים שנוצרו (ראה/י את הציור). אם ידוע כי הנקודה (a,b) נמצאת בתוך המשולש, מצא/י את ההסתברות ש— $S_1 > S_2 > S_3$?

❖ שאלה מס' 2

יהיו X_1 ו— X_2 שני משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות גיאומטרית: $X_1 \sim \mathrm{G}(p)$ ו— $X_2 \sim \mathrm{G}(p)$. חשב/י את ההסתברויות הבאות:

א. $P(X_1 < X_2)$, **ב.** $P(X_1 = X_2)$, **ג.** $P(X_1 > X_2)$.

הערה: $\left.\sum_{j=j_0}^{\infty} q^j\right|_{|q|<1} = \frac{q^{j_0}}{1-q}$.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

❖ **<u>שאלה מס' 3</u>**

א. יהיה X משתנה מקרי בדיד המקבל אינסוף של ערכים $k=0,1,2,\ldots$. הוכח/הוכיחי כי

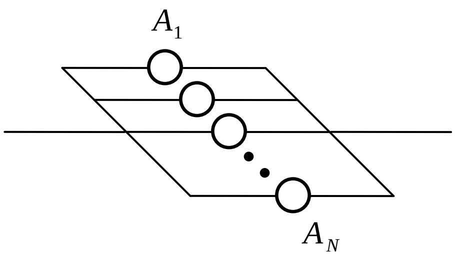
$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k) \, .$$

ב. בזרם אירועים מסוים, זמן המתנה T_j עד התרחשותו האירוע ה— j מתואר על ידי פונקצית צפיפות ההסתברות $f_{T_j}(x)$. הוכח/הוכיחי כי תוחלת $E[X_t]$ של מספר התרחשויות X_t בפרק הזמן $(0,t)$ נתונה על ידי הנוסחא:

$$E[X_t]=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t dx \;\, f_{T_j}(x) \, .$$

❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

מעגל מורכב מ— N יחידות הפועלות ללא תלות בהסתברוית זהות, $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_N)=p$.



חשב/י את:

א. ההסתברות כי בדיוק k יחידות פועלות.

ב. ההסתברות כי מעגל כולו פועל.

ג. ההסתברות כי בדיוק k יחידות פועלות אם ידוע כי מעגל כולו פועל.

❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**

יהיה X משתנה מקרי רציף בעל פונקצית הצפיפות

$$f_X(x)=\frac{(e-1)^2}{2e^2}\left(x^2+\frac{e+1}{e-1}x+\frac{2e}{(e-1)^2}-1\right)\;\exp(-x) \, .$$

המוגדרת עבור $x\geq 0$. נגדיר את המשתנה החדש $Y=[X]+3$ (כאן, $[X]$ מסמן ערך שלם של X).

הוכח/הוכיחי כי $Y\sim \text{NegBin}\left(p=1-\frac{1}{e}, m=3\right)$.

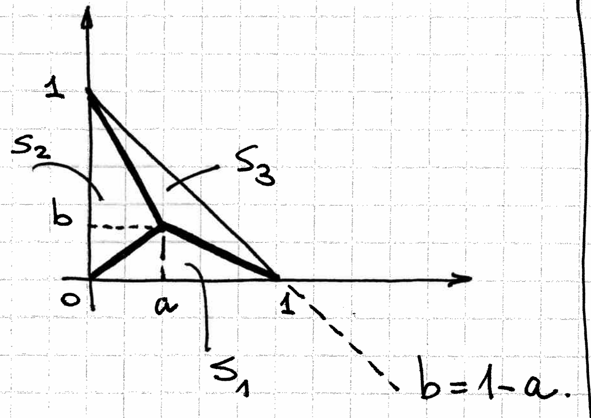
<u>הערה:</u> $\int dx\; x^2e^{-x}=-e^{-x}(x^2+2x+2)$, $\int dx\; x\; e^{-x}=-e^{-x}(x+1)$.

❖ **<u>שאלה מס' 6</u>**

יהיו X ו— Y שני משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות נורמלית עם תוחלת $E[X]=E[Y]=0$ ושונות $\text{var}[X]=\text{var}[Y]$ לא ידועה. נתבונן בווקטור $\vec{R}=(X,Y)$. נתון כי $P\left(\,|\vec{R}|<L_1\right)=p_1$ ו— $P\left(\,|\vec{R}|<L_2\right)=p_2$. מצא/י את היחס $\frac{L_1}{L_2}$. (יש לבטא את התשובה דרך p_1 ו— p_2 בלבד).

בהצלחה!

PROBLEM No 1



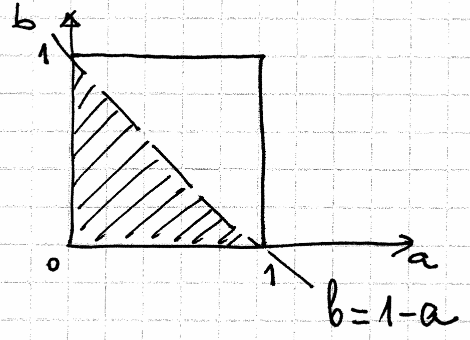
A. THE PROBABILITY

$$P\left((a,b)\in \text{TRIANGLE}\right)=$$

$$=P\left(b<1-a\right)=$$

$$=\frac{\left|\{b<1-a\}\right|}{|\Omega|}=\frac{1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

(SEE THE FIGURE ON THE LEFT).



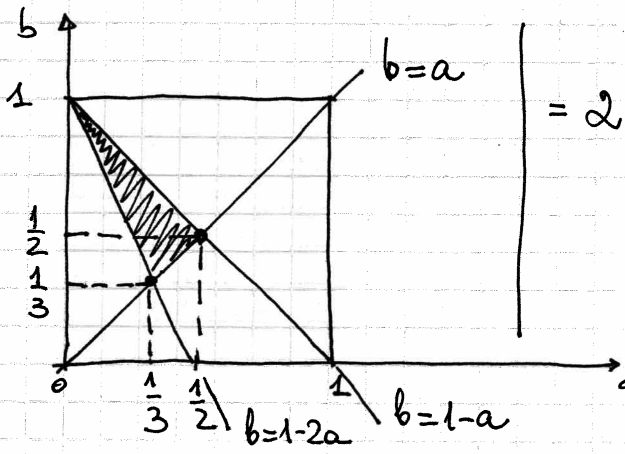
B. $S_1=\frac{b}{2}$; $S_2=\frac{a}{2}$; $S_3=\frac{1}{2}-S_1-S_2=\frac{1-a-b}{2}$.

THE PROBABILITY SOUGHT IS

$$P\left(S_1>S_2>S_3 \,/\, (a,b)\in \text{TRIANGLE}\right)=$$

$$=P\left(\frac{b}{2}>\frac{a}{2}>\frac{1-a-b}{2} \,/\, b<1-a\right)=\frac{P\left(\{b>a\}\cap\{a>1-a-b\}\cap\{b<1-a\}\right)}{P(b<1-a)_{=\frac{1}{2}}}$$

$$=2P\left(\{b>a\}\cap\{b>1-2a\}\cap\{b<1-a\}\right)=$$



$$=2\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right]=\frac{1}{6}.$$

Problem No 2

$$X_1 \sim G(p), \quad X_2 \sim G(p) \Rightarrow P(X_j = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

A. $$P(X_1 < X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X_1 = k)}_{p(1-p)^{k-1}} \underbrace{P(X_2 > k)}_{(1-p)^k} =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-1} = p \cdot \frac{(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}.$$

B. $$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) P(X_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{2k-2}$$

$$= p^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

C. $$P(X_1 > X_2) = P(X_1 < X_2) = \frac{1-p}{2-p}.$$

Problem No 3

A. By definition,

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) =$$

$$\begin{aligned} = \; & P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \ldots \\ & \quad + P(X=2) + P(X=3) + \ldots \\ & \quad \quad + P(X=3) + \ldots \end{aligned} =$$

$$= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$

B. $E[X_t] = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X_t = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_t \geq k).$ $(*)$

[SEE A FOR THE PROOF].

ON THE OTHER HAND,

$$F_{T_j}(t) = P(T_j \leq t) = 1 - P(T_j > t),$$ WHERE

$$P(T_j > t) = \sum_{k=1}^{j-1} P(X_t = k) = P(X_t < j). \quad (**)$$

HENCE, $P(X_t \geq k) = 1 - P(T_k > t) = P(T_k \leq t).$

EQUIVALENTLY, $P(X_t \geq k) \equiv F_{T_k}(t). = \int_0^t dx\, f_{T_k}(x).$ $(***)$

WE THEN CONCLUDE THAT

$$\boxed{E[X_t] \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(X_t \geq k) \overset{(***)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t dx\, f_{T_k}(x)}$$

PROBLEM No 4

DEFINE THE RANDOM VARIABLE $X = \{$NUMBER OF WORKING UNITS$\}$.

A. $P(X = k) = C_N^k\, p^k (1-p)^{N-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

SINCE $X \sim Bin(N, p)$.

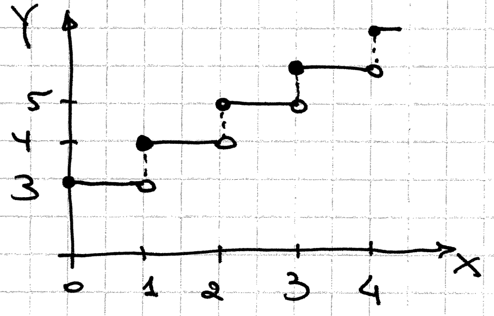
B. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^N.$

C. $$P(X = k / X \geq 1) = \frac{P(X = k \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} =$$

$$= \frac{P(X = k)}{1 - P(X = 0)} = \frac{C_N^k p^k (1-p)^{N-k}}{1 - (1-p)^N}.$$

PROBLEM No 5

TO PROVE THAT $Y \sim \text{NegBin}\left(p = 1-\frac{1}{e}, m=3\right)$, WE CALCULATE THE PROBABILITY FUNCTION $P(Y=k)$ FOR ALL $k = 3, 4, 5, \dots$ (SEE FIG).



$$P(Y=k) = P(k-3 \le X \le k-2) =$$

$$= \frac{(e-1)^2}{2e^2} \int_{k-3}^{k-2} dx \left(x^2 + \frac{e+1}{e-1}x + \frac{2e}{(e-1)^2} - 1\right) e^{-x}$$

ONE OBTAINS:

$$P(Y=k) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} \left(\frac{1}{e}\right)^k (e-1)^3 \qquad (*)$$

THIS HAS TO BE COMPARED WITH THE PROBABILITY FUNCTION FOR $Y' \sim \text{NegBin}(p, m=3)$:

$$P(Y'=k) = C^2_{k-1}\, p^3 (1-p)^{k-3} = \frac{(k-1)!}{(k-3)!\,2!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^3 (1-p)^k$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{2} \left(\frac{p}{1-p}\right)^3 \cdot (1-p)^k. \qquad (**)$$

ONE READILY RECOGNISES THAT $(*)$ AND $(**)$ ARE EQUIVALENT TO EACH OTHER UPON SETTING

$$p = 1 - \frac{1}{e}.$$

END OF PROOF.

PROBLEM No 6

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2+Y^2}\text{ , WHERE } X \sim N(0,\sigma^2) \text{ AND } Y \sim N(0,\sigma^2).$$

DEFINE NEW VARIABLES $Z_1 = \frac{X}{\sigma} \sim N(0,1)$ AND

$Z_2 = \frac{Y}{\sigma} \sim N(0,1)$. THEN

$$P(|\vec{R}| < L_1) = P(X^2+Y^2 < L_1^2) = P\left(Z_1^2 + Z_2^2 < \frac{L_1^2}{\sigma^2}\right)$$

SINCE $Z_1^2 + Z_2^2 \sim \chi^2(2)$, THE LATER PROBABILITY EQUALS

$$P(|\vec{R}| < L_1) = \frac{1}{2}\int_0^{(L_1/\sigma)^2} dy\, e^{-y/2} = \boxed{1 - e^{-\frac{L_1^2}{2\sigma^2}} = p_1} \qquad (1)$$

BY THE SAME TOKEN,

$$\boxed{1 - e^{-L_2^2/2\sigma^2} = p_2} \qquad (2)$$

IT THEN FOLLOWS FROM (1) AND (2) THAT:

$$e^{-L_1^2/2\sigma^2} = 1 - p_1 \Rightarrow \frac{L_1^2}{2\sigma^2} = \log\frac{1}{1-p_1}$$

$$e^{-L_2^2/2\sigma^2} = 1 - p_2 \Rightarrow \frac{L_2^2}{2\sigma^2} = \log\frac{1}{1-p_2}.$$

HENCE,

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{\log\frac{1}{1-p_1}}{\log\frac{1}{1-p_2}}}.}$$