



מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 18.12.2008
שעה: 16:00
סמסטר א' תשס"ט

ת"ז

000 000 000

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות הבוחן

- 1 משך הבוחן: 90 דקות.
- 2 חלק ראשון: עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
- 3 חלק שני: עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
- 4 חומר עזר: דף הנוסחאות המצורף. מותר להיעזר במחשבון.
- 5 בהצלחה !!

❖ חלק ראשון

יש לתת תשובות בטופס זה (משקל: 50 נק')

01. תן/תני שני ניסוחים של עקרון הכפל כמפורט בטבלה. [12 נק']

ניסוח	עקרון הכפל
<p>מספר התוצאות האפשריות בניסוי רב שלבי ניתן על ידי מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד משלבי הניסוי. כלומר, עבור ניסוי שמתבצע ב- k, מתקיים:</p> $N = \prod_{j=1}^k n_j$ <p>כאן, n_j הוא מספר התוצאות האפשריות בשלה ה- j של הניסוי.</p>	<p>עבור מספר תוצאות אפשריות בניסוי רב שלבי</p>
<p>הסתברות של ניסוי רב שלבי עבור המאורע $B = \bigcap_{j=1}^n A_j$ נתונה על ידי הנוסחה:</p> $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P(A_1) \prod_{j=2}^n P\left(A_j / \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$	<p>עבור הסתברות של ניסוי רב שלבי</p>

גולומב 52, ת.ד. 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619

52 Golomb St., Holon 58102 Israel

www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619

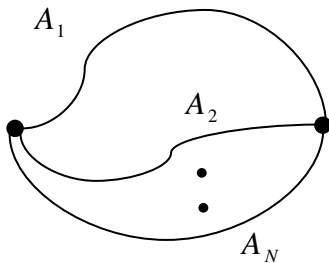
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

02. נסח/י את משפט הפרוק. [9 נק']

ניסוח:

יהיו X_1, \dots, X_n משתני ברנולי בלתי תלויים בעלי אותו פרמטר $0 \leq p \leq 1$.

אזי המשתנה $X = \sum_{k=1}^n X_k$ מפולג בינומית: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.



03. ישנם N כבישים (A_1, A_2, \dots, A_N) המקשרים בין שתי ערים. בגלל מזג אוויר חורפי, כל אחד מהכבישים יכול להיות סתום לתנועה בהסתברות p באופן בלתי תלוי מכבישים אחרים. מהן ההסתברויות הבאות:

א. ההסתברות כי בדיוק k כבישים סתומים? [5 נק']

תשובתך: $P(X = k) = C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}$

ב. ההסתברות כי ניתן להגיע מעיר אחת לשנייה? [5 נק']

תשובתך: $P(X \leq N - 1) = 1 - P(X = N) = 1 - p^N$

ג. ההסתברות כי בדיוק k כבישים סתומים אם ידוע כי ניתן להגיע מעיר אחת לשנייה?

[10 נק']

תשובתך:
$$P(X = k / X \leq N - 1) = \begin{cases} \frac{C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}}{1 - p^N}, & k = 0, \dots, N - 1 \\ 0, & k = N \end{cases}$$

סוג ופרמטרים של ההתפלגות	הגדרות הניסוי והמשתנה
Hyp (N, N - D, n)	ניסוי: הוצאת n פריטים ללא החזרה מהאוסף של D פריטים מיוחדים ו-N - D פריטים רגילים. משתנה: X = {מספר הפריטים הרגילים בין n פריטים שהוצאו}
NegBin (k, p = D / N)	ניסוי: הוצאת פריטים עם החזרה מהאוסף של D פריטים מיוחדים ו-N - D פריטים רגילים. משתנה: X = {מספר הוצאות עד אשר יתקבל הפריט המיוחד ה-k}
Hyp (N, D, n)	ניסוי: הוצאת n פריטים בלי החזרה מהאוסף של D פריטים מיוחדים ו-N - D פריטים רגילים. משתנה: X = {מספר הפריטים המיוחדים בין n שהוצאו}

❖ חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן (משקל: 50 נק')

01. בהטלה הבודדת של מטבע מזויף התוצאה "עץ" מתקבלת בהסתברות $0 < p < 1$. המטבע מוטל n פעמים. נגדיר את שני המאורעות הבאים: $A = \{\text{מתקבלת תוצאת "עץ" בהטלה הראשונה}\}$; $B = \{\text{בסדרה של n הטלות מתקבלות בדיוק k תוצאות "עץ"}\}$. עבור אילו ערכי k ו-n יהיו A ו-B מאורעות בלתי תלויים? [25 נק']

פתרון: מתקיים: $P(A) = p$ ו- $P(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. נחשב גם את ההסתברות $P(A \cap B)$:
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = p \cdot P(B/A)$. המאורע $B/A = \{k-1\}$ תוצאות "עץ" בסדרה של n-1 הטלות. כתוצאה, $P(B/A) = C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$, כך ש-

$$P(A \cap B) = p C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

המאורעות A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים אם מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. מכאן נובע כי $p C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = p C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. במילים אחרות:

$$p = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{(n-1)! k! (n-k)!}{(k-1)! (n-k)! n!} = \frac{k}{n}$$

התשובה: $k = np$.

02. נתבונן בביטוי המתקבל לאחר פתיחת הסוגריים ב- $\left(t - \frac{1}{t^2} + a\right)^5$.

א. מהם האיברים שאינם תלויים ב- t ? [12 נק']

ב. מהו המקדם $M(a)$ באיברים מסוג $\frac{M(a)}{t}$? [13 נק']

הערה: עליך להשתמש בנוסחא המולטינומית.

פתרון: הנוסחא המולטינומית מביאה:

א. $a^5 - 30a^2$. ב. $M(a) = -20a^3 + 10$.

בהצלחה !!

❖ חלק שלישי

נוסחאות לרשותך

חוקי הסתברות נבחרים

- **חוק המשלים:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- **חוק האיחוד:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **חוק קומוטטיבי:** $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- **חוק אסוציאטיבי:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- **חוק דיסטריבוטיבי:** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- **חוק דה מורגן:** $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

הסתברות מותנית ואי תלות

- **נוסחא להסתברות מותנית:** $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$
- **אי תלות** – המאורעות A ו- B הם מאורעות בלתי תלויים אם
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- **משפט בייס** – עבור מאורעות A ו- B בעלי הסתברות חיובית מתקיים:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

מספר בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
מסודרת	n^k	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
לא מסודרת	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

נוסחא מולטינומית

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0) \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

התפלגות בינומית

- **סימון:** $X \sim \text{Bin}(n, p), 0 \leq p \leq 1, n$ מספר שלם חיובי
- **פונקציית הסתברות:** $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ עבור $k = 0, 1, \dots, n$
- **מדדים:** $E[X] = np$, **שונות:** $\text{Var}[X] = np(1-p)$