מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 07.02.2008
א' באדר א' תשס"ח
סמסטר א' מועד א'

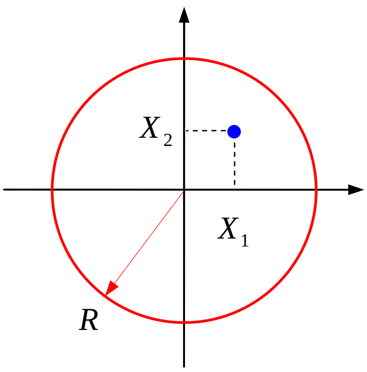
מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
מרצים: ד"ר יבגניה אפרצין, פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות המבחן

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1



יהיו X_1 ו-X_2 שורשי המשוואה $x^2+ax-\frac{b}{2}=0$ בה המקדמים a ו-b הם שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $a\sim \mathrm{U_c}(0,1)$ ו-$b\sim \mathrm{U_c}(0,1)$.

מצא/י את ההסתברות להמצאות הנקודה (X_1, X_2) בתוך מעגל בעל רדיוס R. (ראה/י ציור).

❖ שאלה מס' 2

בסעיפים מטה מדובר על מטבע מוטה בעל ההסתברות p לקבלת התוצאה "עץ" בהטלה בודדת.

א. יוג'ין מטיל מטבע מוטה פעם אחרי פעם. מהי ההסתברות שהוא אי פעם יקבל את התוצאה "עץ"?

ב. n אנשים – יוג'ין (האיש הראשון), ..., אהוד (האיש ה-n) – מטילים מטבע מוטה לסירוגין. הראשון שיקבל את התוצאה "עץ" ינצח.

ב-1: מהי ההסתברות שיוג'ין ינצח?
ב-2: מהי ההסתברות שאהוד ינצח?

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

❖ **שאלה מס' 3**

יהיה X_t מספר פניות המגיעות למוקד בפרק הזמן $(0,t)$. בהנחה כי פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי X_t נתונה על ידי הנוסחא $P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k+1)!} e^{-\lambda t}\left[(2k+1)+\lambda t\right]$ (כאן, $k = 0, 1, 2, \ldots$), מצא/י את פונקציות הצפיפות

א. $f_{T_1}(t)$ עבור המשתנה T_1 = {זמן המתנה עד הפניה הראשונה}

ב. $f_{T_2}(t)$ עבור המשתנה T_2 = {זמן המתנה עד הפניה השנייה}

❖ **שאלה מס' 4**

פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(t)$ של משתנה מקרי רציף X נתונה על ידי הנוסחא

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a - b(t-1)^2, & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le t < 2 \\ \frac{c}{2}(t-1), & 2 \le t < 3 \\ d, & t \ge 3 \end{cases}$$

א. מצא/י את המקדמים a, b, c ו— d.

ב. חשב/י את פונקצית הצפיפות $f_X(t)$ וסרטט אותה.

ג. מצא/י את התוחלת $E[X]$ של משתנה מקרי X.

ד. מהי ההסתברות המותנית $P\left(|X| < a + c \;/\; X > ac\right)$?

❖ **שאלה מס' 5**

מעגל חשמלי מורכב מ—8 יחידות הפועלות ללא תלות ובהסתברות זהה p. ההסתברות למאורע Q = {המעגל כולו פועל} ניתנת על ידי הנוסחא

$$P(Q) = P(A_0) \times \Big\{ \Big[P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)) - P(((A_2 \cup A_3) \cap (B_2 \cup B_3)) \cup (A_1 \cap B_1)) \Big] \cdot p + P(((A_2 \cup A_3) \cap (B_2 \cup B_3)) \cup (A_1 \cap B_1)) \Big\}.$$

צייר/י את המעגל. נמק/י את תשובתך.

❖ **שאלה מס' 6**

חוקר בנה רווח סמך לתוחלת לפי מדגם מקרי של n תצפיות: $\mu_1 < \mu < \mu_2$. הנחות החישוב הן: (א) שונות ידועה, (ב) רמת סמך נתונה, (ג) התצפיות מפולגות נורמלית. הוספת תצפית נוספת, X_{n+1}, משנה את רווח הסמך: $\mu'_1 < \mu < \mu'_2$. בטא/י את μ'_1 ו— μ'_2 דרך μ_1, μ_2, X_{n+1} ו— n בלבד.

בהצלחה!

SOLUTIONS OF THE EXAM
07.02.08

PROBLEM No 1

THE ROOTS OF THE EQUATION $x^2+ax-\frac{b}{2}=0$ ARE

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2+2b}}{2} \in \mathbb{R} & \text{SINCE } a,b \in (0,1) \\ x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+2b}}{2} \in \mathbb{R} & \text{SINCE } a,b \in (0,1) \end{cases}$$

DIRECT CALCULATION YIELDS:

$$x_1^2+x_2^2 = a^2+b.$$

THE PROBABILITY SOUGHT IS

$$P\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq R\right) = P\left(x_1^2+x_2^2 \leq R^2\right) = P\left(a^2+b \leq R^2\right)$$

$$= P\left(b \leq R^2-a^2\right)$$

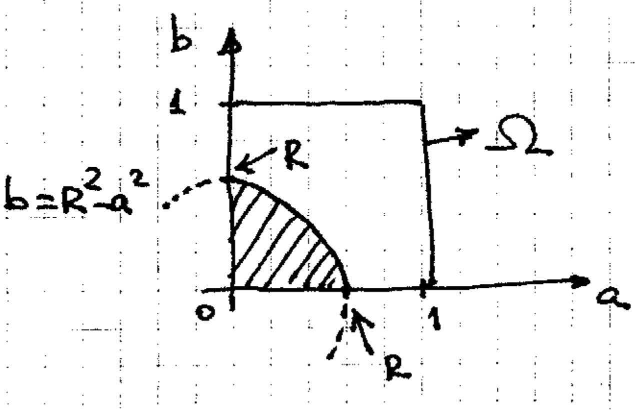
SINCE BOTH a AND b ARE UNIFORMLY DISTRIBUTED, WE ARE ALLOWED TO USE A CLASSICAL APPROACH TO PROBABILITY:

$$P\left(b \leq R^2-a^2\right) = \frac{\left|\{b \leq R^2-a^2\}\right|}{|\Omega|} = \left|\{b \leq R^2-a^2\}\right|$$

(WE HAVE USED THE FACT THAT $|\Omega|=1$).

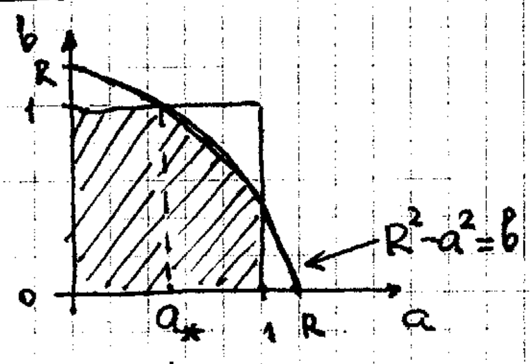
THREE DIFFERENT CASES HAVE TO BE CONSIDERED:

No 1 $\quad 0 \leq R < 1$



$$\left|\{b \leq R^2-a^2\}\right| = \int_0^R da\,(R^2-a^2) = \frac{2R^3}{3}.$$

No 2 $\quad 1 < R \leq \sqrt{2}$ (SEE BELOW).



$$|\{b \leq R^2-a^2\}| =$$

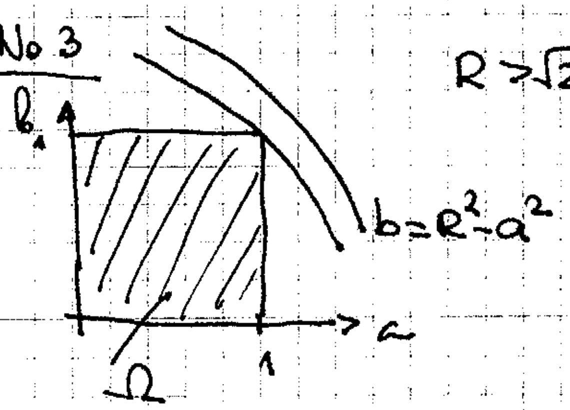
$$= a_* \cdot 1 + \int_{a_*}^{1} da\,(R^2-a^2)$$

$$R^2-a_*^2 = 1 \Rightarrow a_* = \sqrt{R^2-1}$$

SIMPLE CALCULATION YIELDS:

$$|\{b \leq R^2-a^2\}| = R^2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{R^2-1}\,(R^2-1).$$

No 3 $\quad R > \sqrt{2}$.



HERE,

$$|\{b \leq R^2-a^2\}| = 1.$$

TO SUMMARISE:

$$P\big((X_1,X_2) \in \text{circle}\big) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2R^3}{3}, & 0 \leq R < 1 \\ R^2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}(R^2-1)\sqrt{R^2-1}, & 1 \leq R < \sqrt{2} \\ 1, & R \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

PROBLEM No 2

A. THE PROBABILITY $\hat{\pi}$ TO GET [illegible] "H" (HEAD) IS CONTRIBUTED BY THE INFINITE SET OF OPTIONS:

FIRST OPTION: $\boxed{H}$ $\qquad P_1 = p$

SECOND OPTION: $\boxed{T}\boxed{H}$ $\qquad P_2 = (1-p)\cdot p$

TAIL HEAD

THIRD OPTION: $\boxed{T}\boxed{T}\boxed{H}$ $\qquad P_3 = (1-p)^2 \cdot p$

$\vdots$

k-th OPTION: $\underbrace{\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }}_{k-1 \text{ "T"}}\boxed{H}$ $\qquad P_k = (1-p)^{k-1} p$

$\vdots$

HENCE, WE GET:

$$\hat{\pi} = p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} \equiv 1.$$

B1. "EUGENE WINS" CORRESPONDS TO A SERIES OF OPTIONS:

$\boxed{H} \quad \rightarrow \quad p$

$\underbrace{\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}}_{n}\boxed{H} \quad \rightarrow \quad (1-p)^n \cdot p$

$\underbrace{\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}}_{n}\underbrace{\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}\boxed{T}}_{n}\boxed{H} \quad \rightarrow \quad (1-p)^{2n} \cdot p$

$\vdots$

HENCE, THE PROBABILITY SOUGHT EQUALS:

$$\hat{\pi}_{EUGENE} = p + p(1-p)^n + p(1-p)^{2n} + \ldots =$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-p)^n\right]^k = p \frac{1}{1-(1-p)^n}.$$

B2. SIMILARLY, "EHUD WINS" IS DESCRIBED BY THE OPTIONS:

$$\underbrace{TTTTTTT}_{n-1}H \to (1-p)^{n-1}p$$

$$\underbrace{\underbrace{TTTTTT}_{n-1}T}_{n}\underbrace{TTTTTT}_{n-1}H \to (1-p)^{n}(1-p)^{n-1}\cdot p$$

$$\underbrace{TTTT}_{n}\underbrace{TTTT}_{n}\underbrace{TTTT}_{n-1}H \to (1-p)^{2n}(1-p)^{n-1}p$$

$$\vdots$$

HENCE,

$$P_{EHUD} = p(1-p)^{n-1} + p(1-p)^{n-1}\cdot(1-p)^{n} + p(1-p)^{n-1}(1-p)^{2n} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{n-1}\cdot\left[(1-p)^{n}\right]^{k} = p(1-p)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-p)^{n}\right]^{k} =$$

$$= \frac{p(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^{n}}.$$

PROBLEM No3

THE CUMMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION FOR $T_j = \{$WAITING TIME FOR THE j-TH EVENT$\}$ EQUALS:

$$F_{T_j}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{j-1} P(X_t = k).$$

A. AS THE RESULT,

$$F_{T_1}(t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}(1+\lambda t).$$

$$f_{T_1}(t) = \frac{d}{dt}F_{T_1}(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{OTHERWISE.} \end{cases}$$

B. CONSEQUENTLY,

$$F_{T_2}(t) = 1 - P(X_t=0) - P(X_t=1) =$$

$$= F_{T_1}(t) - \frac{(\lambda t)^2}{3!} e^{-\lambda t}\left[\lambda t + 3\right].$$

$$f_{T_2}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_2}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^4 t^3}{6} e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{OTHERWISE.} \end{cases}$$

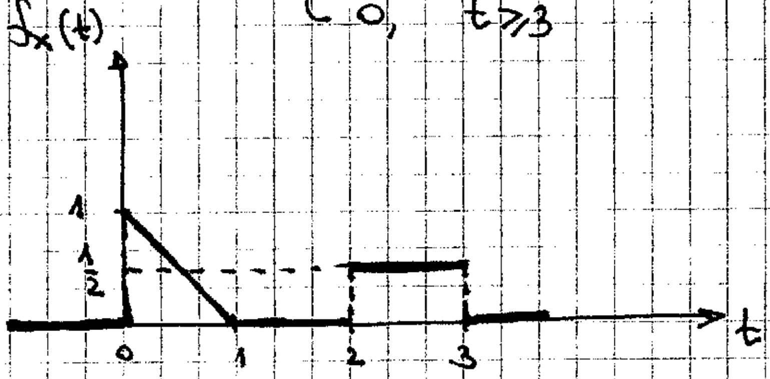
PROBLEM No 4

A. TO SOLVE THIS PROBLEM, WE MAKE USE OF THE CONTINUITY OF $F_X(t)$:

$$\left.\begin{array}{ll} t=0: & 0 = a - b \\ t=1: & a = \frac{1}{2} \\ t=2: & \frac{1}{2} = \frac{c}{2} \\ t=3: & c = d \\ t=+\infty: & d = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{1}{2} \\ c = 1, \ d = 1. \end{array}$$

B. $f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t)$:

$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$



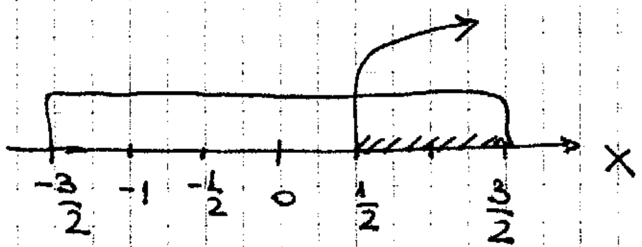
C. THE MEAN:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cdot t\, f_X(t) = \int_0^1 dt \cdot t\,(1-t) + \int_2^3 dt \cdot t \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{17}{12}.$$

D. $$P\left(|X| < a+c \,/\, X > ac\right) = P\left(|X| < \frac{3}{2} \,/\, X > \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{P\left(\left\{|X| > \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{|X| < \frac{3}{2}\right\}\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)}{1 - P\left(X < \frac{1}{2}\right)} =$$



$$= \frac{F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{5}.$$

PROBLEM No 5

THE EXPRESSION GIVEN SUGGESTS THAT $P(Q)$ FOLLOWS THE FORM:

$$P(Q) = P(A_0) \cdot \Big[p \cdot P\big((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)\big) +$$

$$+ (1-p)\, P\Big(\big((A_2 \cup A_3) \cap (B_2 \cup B_3)\big) \cup (A_1 \cap B_1)\Big)\Big].$$

HENCE, THE CIRCUIT IS

Fig 1

HERE,

$$P(E) = p \cdot P(E/C) + (1-p)\, P(E/\bar{C}),$$

SO THAT:

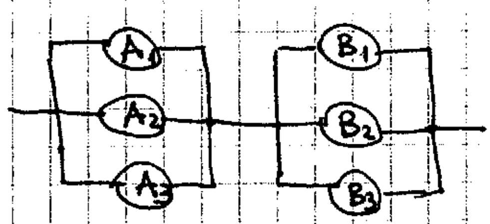
$$P(E/C) = P\Big((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) \Big)$$

whilst

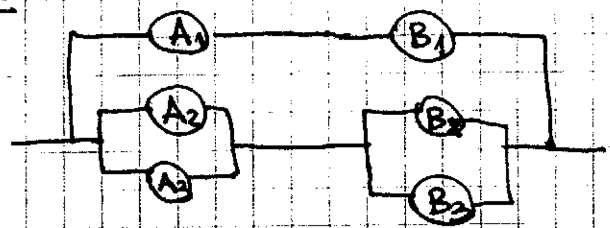
$$P(E/\bar{C}) = P\Big(\big((A_2 \cup A_3) \cap (B_2 \cup B_3) \big) \cup (A_1 \cap B_1) \Big).$$

TWO EFFECTIVE CIRCUITS ARE:

E/C:



E/$\bar{C}$:



AS THE RESULT, THE CIRCUIT E IS

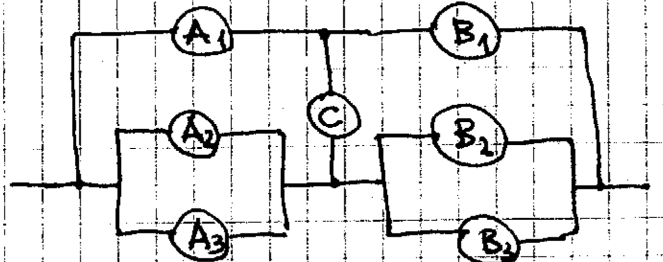


FIG. 2

THE FIGS. 1 AND 2 PROVIDE THE ANSWER.

PROBLEM No 6

THE FORMULA USED BY A RESEARCHER IS:

$$\overline{X}_{(n)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_{(n)} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

SO THAT:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= \overline{X}_{(n)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \mu_2 &= \overline{X}_{(n)} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \overline{X}_{(n)} &= \frac{\mu_1+\mu_2}{2} \\ z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma &= \frac{\mu_2-\mu_1}{2}\sqrt{n}. \end{aligned}$$

THE NEW DATA X_{n+1} CHANGES THE AVERAGE:

$$\overline{X}_{(n+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} X_j = \frac{1}{n+1}\left[n\overline{X}_{(n)} + X_{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n}{2}(\mu_1+\mu_2) + X_{n+1}\right].$$

AS THE RESULT;

$$\overline{X}_{(n+1)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n+1}} < \mu' < \overline{X}_{(n+1)} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n+1}}$$

CAN BE TRANSFORMED TO:

$$\boxed{\frac{\frac{n}{2}(\mu_1+\mu_2) + X_{n+1}}{n+1} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{\mu_2-\mu_1}{2} < \mu' < \frac{\frac{n}{2}(\mu_1+\mu_2) + X_{n+1}}{n+1} + \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{\mu_2-\mu_1}{2}}$$