Holon Academic
Institute of Technology

מכון אקדמי
טכנולוגי חולון (ע"ר)

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS
המחלקה למתמטיקה שימושית

תאריך: 30.12.04
סמסטר א' תשס"ו

ת.ז.
000 000 000

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019

הוראות הבוחן:

1. **משך הבוחן:** שעתיים.
2. **חלק ראשון:** עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
3. **חלק שני:** עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
4. **חומר עזר:** דף הנוסחאות המצורף.

חלק ראשון

יש לתת תשובות בטופס זה (משקל: 60 נק')

01. כלל השרשרת עבור שני מאורעות ניתן בטבלה. איך יראה כלל השרשרת עבור שלושה וארבעה מאורעות? יש לתת את התשובה בטבלה. [6 נק']

מאורעות:	כלל שרשרת:
A_1 ו- A_2	$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 / A_1)$
A_1, A_2 ו- A_3	$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)$
A_1, A_2, A_3 ו- A_4	$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2 / A_1) \times P(A_3 / A_1 \cap A_2)P(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

02. נתונים שני מאורעות בלתי תלויים, A ו- B, המתרחשים בהסתברויות $P(A)$ ו- $P(B)$ בהתאמה. האם הטענות הבאות נכונות? (יש לרשום כן או לא בלבד.) [5 נק']

טענה	כן / לא
אזי המאורעות A ו- B הם בהכרח מאורעות זרים	לא
אזי מתקיים: $P(A \setminus B) = P(A) \cdot (1 - P(B))$	כן

המשך:

טענה	כן / לא
אזי מתקיים: $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$	לא
אזי מתקיים: $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A)P(B)$	כן
אזי מתקיים: $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B))$	כן

.03 נתונים מאורעות A ו— B כאלה ש— $P(A) = a$, $P(B) = b$ ו— $P(A \cup B) = c$. נא לבטא את ההסתברויות שבטבלה דרך a, b ו— c בלבד. יש לתת רק את התשובות הסופיות.
[14 נק']

מאורע	הסתברות המאורע
$A \cap B$	$a + b - c$
$\overline{A} \cap B$	$c - a$
$A \cap \overline{B}$	$c - b$
$\overline{A} \cap \overline{B}$	$1 - c$
$\overline{A} \cup B$	$1 - c + b$
$A \cup \overline{B}$	$1 - c + a$
$\overline{A} \cup \overline{B}$	$1 - a - b + c$

.04 נא לנסח את הנוסחה להסתברות שלמה. [5 נק']

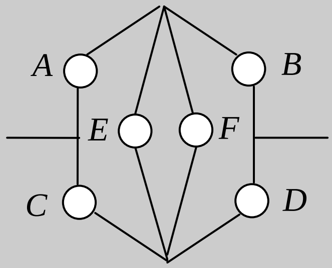
יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n$ מאורעות זרים בזוגות, ($A_i \cap A_j = \varnothing$ עבור כל זוג $i \neq j$) כאלה שאיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. אזי לכל מאורע B מתקיים מאותו מרחב המדגם מתקיים:

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i) \cdot P(A_i)$.

.05 מעגל חשמלי מורכב מיחידות A, B, C, D, E ו- F. בהנחה כי הסתברות המאורע Q = {מעגל כולו פעול} ניתנת על ידי הנוסחא

$$P(Q) = P((A \cup C) \cap (B \cup D) \cap (E \cup F))$$
$$+ P\left((A \cap B) \cup (C \cap D) / (\overline{E} \cap \overline{F})\right) \cdot (1 - P(E \cup F))$$

צייר/י את המעגל בתא. [15 נק']



06. כמה מילים שונות ניתן להרכיב מהאותיות הכלולים במילה STATISTICS ? [6 נק']

$$P_{10}(3,3,1,2,1)=\frac{10!}{3!3!2!}=50400$$

07. איך מפולגים המשתנים המוגדרים בטבלה? [9 נק']

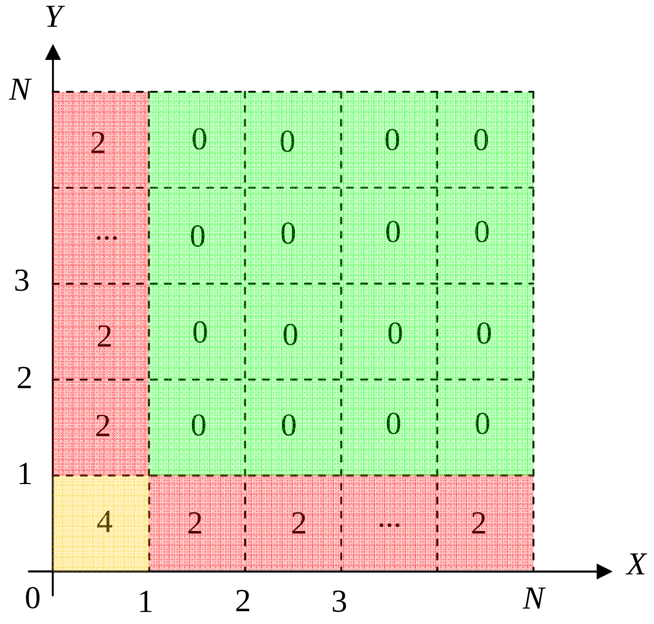
הגדרות הניסוי והמשתנה	סוג ופרמטרים של ההתפלגות
ניסוי: הטלת מטבע מזויף m פעמים. ההסתברות לתוצאה "פלי" היא p. **משתנה:** $X=$ {מספר ההטלות בהן יצאה התוצאה "עץ"}	$B(m,1-p)$
ניסוי: בחירה אקראית של כדור מאוסף הכדורים הממוספרים מ-1 עד n. **משתנה:** $X=$ {מספר שמופיע על הכדור הנבחר}	$U(1,n)$
ניסוי: הטלת קוביה מאוזנת. **משתנה:** $X=$ {מספר ההטלות עד קבלת הפאה "6" בפעם ה— k}.	$NB\left(\frac{1}{6},k\right)$

חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן (משקל: 40 נק')

08. מטבע ברדיוס של יחידה אחת נזרק על המישור ומרכזו הגיאומטרי של המטבע יכול לנחות בכול נקודה (x_0,y_0) על המישור באחידות כך ש- $-N\le x_0\le N$ ו- $-N\le y_0\le N$ (N הוא מספר שלם חיובי כלשהו). יהיה משתנה מקרי $M=$ {מספר החיתוכים בין שפת המטבע לצירים X ו- Y}. אם ידוע כי $M=2$, מהי ההסתברות שמרכזו של המטבע נחת באיזור $x_0\ge 1$? [20 נק']

<u>פתרון:</u> בשלב הראשון, יש לחשב את פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי M. בשאלת בית H4.7 קיבלנו (יש לתת פתרון במחברת הבחינה):



$$P(M=4)=\frac{1}{N^2}$$
$$P(M=2)=\frac{2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)$$
$$P(M=0)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^2$$

יש לחשב את ההסתברות $P(x_0\ge 1/M=2)$. על פי הנוסחא להסתברות מותנית:

$$P(x_0\ge 1/M=2)=\frac{P(\{x_0\ge 1\}\cap\{M=2\})}{P(M=2)}.$$

על פי גישה קלאסית להסתברות:

$$P(\{x_0\ge 1\}\cap\{M=2\})=\frac{|\{x_0\ge 1\}\cap\{M=2\}|}{|\Omega|}=\frac{2(N-1)}{4N^2}=\frac{N-1}{2N^2}$$

כך ש—

$$P(x_0\ge 1/M=2)=\frac{N-1}{2N^2}\frac{N^2}{2(N-1)}=\frac{1}{4}.$$

<u>התשובה</u>: $\boxed{P(x_0\ge 1/M=2)=\frac{1}{4}}$

09. מטילים קוביה מאוזנת פעם אחרי פעם ומסכמים את התוצאות. מהי ההסתברות שאי פעם נגיע לסכום התוצאות ששווה ל-4? [20 נק']

<u>פתרון</u>: האופציות המתאימות לסכום התוצאות השווה ל-4 מפורטות מטא:

<u>אופציה 1</u>: כבר בהטלה הראשונה מקבלים את התוצאה "4": $P_{[4]}=\frac{1}{6^1}$.

<u>אופציה 2</u>: מגיעים לסכום השווה ל-4 אחרי שתי הטלות. כלומר, התוצאות הן: $\{1,3\}$, $\{3,1\}$ ו— $\{2,2\}$. ההסתברויות המתאימות הן: $P_{[1,3]}=P_{[3,1]}=P_{[2,2]}=\frac{1}{6^2}$.

__אופציה 3__: מגיעים לסכום השווה ל-4 אחרי שלוש הטלות. כלומר, התוצאות הן: $\{1,1,2\}$, $\{1,2,1\}$ ו— $\{2,1,1\}$. ההסתברויות המתאימות הן: $P_{[1,1,2]}=P_{[1,2,1]}=P_{[2,1,1]}=\frac{1}{6^3}$.

__אופציה 4__: מגיעים לסכום השווה ל-4 אחרי ארבע הטלות. כלומר, התוצאה היא: $\{1,1,1,1\}$.

ההסתברויות המתאימה היא: $P_{[1,1,1,1]}=\frac{1}{6^4}$.

סך הכול, ההסתברות שאי פעם נגיע לסכום של 4 היא:

$$P=\frac{1}{6^1}+3\cdot\frac{1}{6^2}+3\cdot\frac{1}{6^3}+\frac{1}{6^4}=\frac{7^3}{6^4}=\frac{343}{1296}.$$

__התשובה__: $\boxed{P=\frac{343}{1296}}$

נוסחאות לרשותך

חוקי הסתברות
• **חוק האיחוד**: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
• **חוק קומוטטיבי**: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
• **חוק אסוציאטיבי**: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$.
• **חוק דיסטריבוטיבי**: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
• **חוק דה מורגן**: $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
• **הסתברות מותנית**: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
• **משפט בייס**: $P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$.
סוגי מאורעות
• **מאורע וודאי** Ω – מאורע שכולל את כל המאורעות של מרחב המדגם.
• **מאורע ריק** $\varnothing$ – תוצאה בלתי אפשרית, מאורע שאינו כולל אף מאורע של מרחב המדגם.
• **מאורעות זרים** – A ו-B הם מאורעות זרים אם הם לא כוללים מאורעות משותפים, $A\cap B=\varnothing$.
• **מאורעות זרים בזוגות** – A_i ו-A_j הם מאורעות זרים בזוגות אם $A_i\cap A_j=\varnothing$ לכל $i\neq j$.

אלגברת מאורעות

- **איחוד** $A \bigcup B$ – אוסף כל המאורעות הכלולים ב- A או ב- B או בשניהם.
- **חיתוך** $A \bigcap B$ – אוסף כל המאורעות הכלולים ב- A וגם ב- B.
- **מינוס** $A \setminus B$ – אוסף כל המאורעות הכלולים ב- A ולא כלולים ב- B
- **השלמה** $\overline{A}$ – אוסף כל המאורעות הכלולים במרחב המדגם ולא כלולים ב- A.
- **הכלה** $A \subset B$ – כל תוצאה השייכת למאורע A שייכת גם למאורע B.

מספר סידורים

- של n איברים שונים בשורה שווה ל- $P_n = n!$.
- של n איברים שונים במעגל שווה ל- $(n-1)!$.
- של n איברים בשורה שמתוכם n_1 איברים זהים מסוג ראשון, n_2 איברים זהים מסוג שני, .., n_k איברים זהים מסוג ה- k (כך ש- $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) שווה ל-

$$P_n(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

בהצלחה !!