מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 23.08.06
סמסטר א' מועד ג'

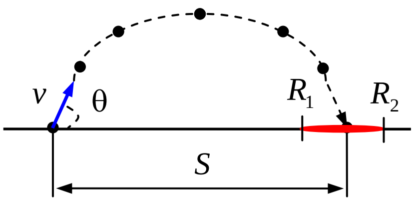
מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019
מרצים: ד"ר יוג'ין קנציפר, ד"ר מיכאל בלואוסוב, ד"ר אלכסנדר פיש, ד"ר אלכסנדר קפלונובסקי

❖ הוראות המבחן

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 בעיות מתוך 6 בעיות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אלו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper/teaching/ps/ps.html. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1



התותח יורה את הפגז במהירות התחלתית v בזווית θ כמפורט בציור. בהנחה כי מחירות התחלתית v היא משתנה מקרי מעריכי, $v \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{v_0}\right)$, מצא/י את ההסתברות שהפגז ינחת בטווח המרוחים בין R_1 ל— R_2 מנקודה בה נמצא התותח.

הערה: הפגז שיורה במהירות התחלתית v בזווית θ עובר עד הנחיתה את המרחק $S = \frac{v^2}{g}\sin(2\theta)$.

כאן, g הוא תאוצת הכובד.

❖ שאלה מס' 2

מתוך כד בו D כדורים אדומים ו—$(N-D)$ כדורים שחורים הוצאו באקראי וללא החזרה n כדורים ($1 \le n \le N$). לאחר ששוכפלו הכדורים שנלקחו ב— p עותקים, הוחזרו np כדורים חזרה לכד. במצב החדש הוצא כדור אחד מהכד. מהי ההסתברות שצבעו אדום?

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026601, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6601, Fax. 972-3-502-6619
ביה"ס למדעים
School of Sciences

❖ **שאלה מס' 3**

נתונים שני משתנים מקריים בינומיים בלתי תלויים, $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ ו- $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$. נגדיר משתנה מקרי חדש $Z = X + Y$.

א. מהם הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Z ?

ב. מצא/י את פונקצית ההסתברות $P_Z(z)$ של המשתנה המקרי Z.

❖ **שאלה מס' 4**

מתוך הקבוצה המכילה n כדורים שחורים ו- $2n$ כדורים ירוקים נלקחו באקראי n כדורים ללא החזרה. יהיו N_B ו- N_G מספר הכדורים השחורים והירוקים בין n הכדורים שנלקחו.

א. חשב/י את פונקצית ההסתברות המשותפת של N_B ו- N_G.

ב. חשב/י את פונקציות ההסתברות השוליות של N_B ו- N_G.

ג. האם המשתנים המקריים N_B ו- N_G הם משתנים בלתי תלויים? נמק/י את תשובתך.

ד. מצא/י את התוחלות $E[N_B]$ ו- $E[N_G]$.

❖ **שאלה מס' 5**

פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(t)$ של משתנה מקרי רציף X נתונה על ידי הנוסחא

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{4}t(t+1), & 0 \le t < 1 \\ at^b, & 1 \le t < 2 \\ c, & t \ge 2 \end{cases}.$$

א. חשב/י את הפרמטרים a, b ו- c עבורם $F_X(t)$ אומנם פונקצית התפלגות מצטברת.

ב. שרטט/י את הפונקציה $F_X(t)$.

ג. מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\mathrm{var}[X]$ של המשתנה המקרי X.

ד. חשב/י את ההסתברות המותנית $P\left(X < 2 \ / \ |X| > 1\right)$.

❖ **שאלה מס' 6**

במרחב דו ממדי, נתונים שני וקטורים $\vec{X} = (X_1, X_2)$ ו- $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$. הקואורדינטות X_1 , X_2 , Y_1 ו- Y_2 הם משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים, $X_j \sim N(0, \sigma_X^2)$ ו- $Y_j \sim N(0, \sigma_Y^2)$.

א. מהי ההסתברות שערכו של הוקטור $\vec{X} + \vec{Y}$ יעלה על R ?

ב. מהי ההסתברות שערכו של הוקטור $\vec{X} - \vec{Y}$ יעלה על R ?

בהצלחה!

PROBLEM No1

$$v \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{v_0}\right) \; : \; f_v(v) = \frac{1}{v_0} e^{-v/v_0}\, \theta(v).$$

$$S = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta \, ;$$

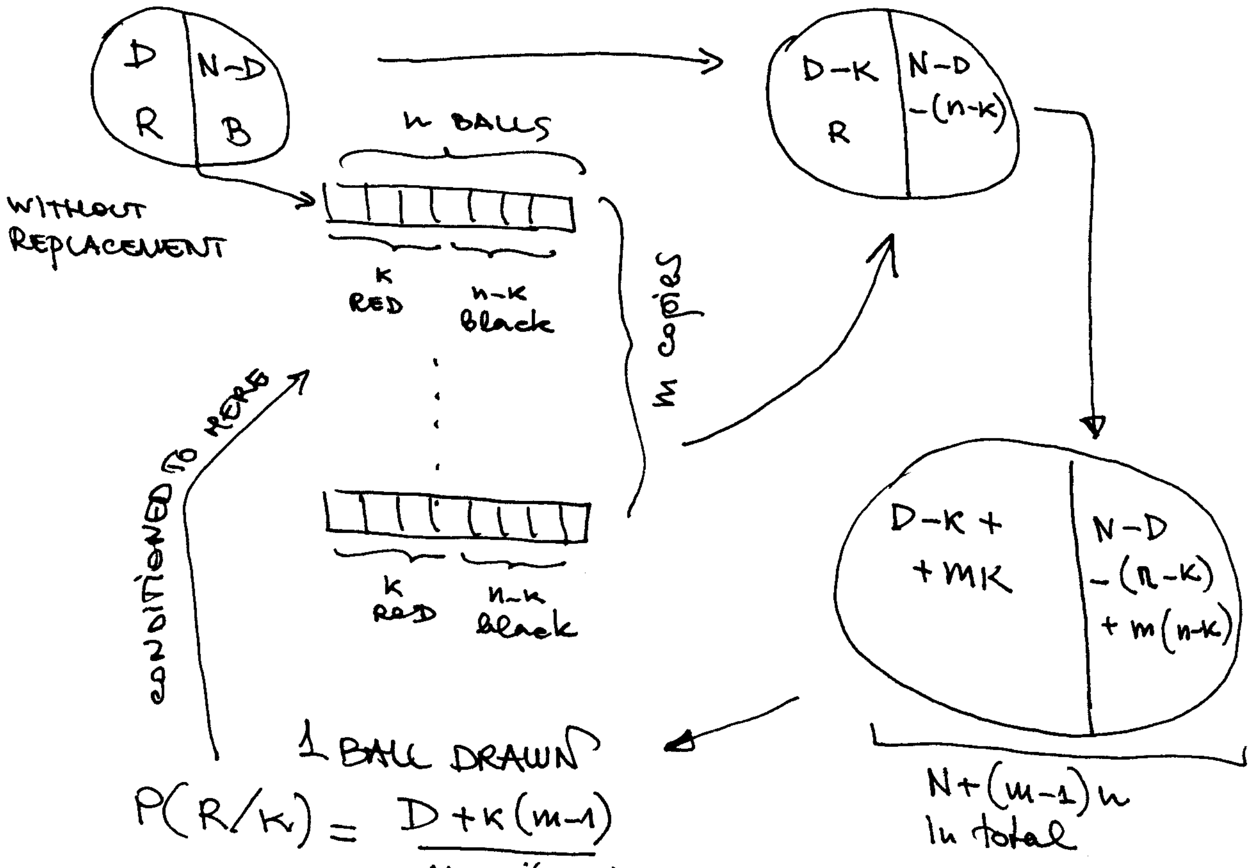
$$P\left(R_1 < S < R_2 \right) = P\left(R_1 \le \frac{v^2}{g}\sin 2\theta \le R_2 \right) =$$

$$= P\left(\sqrt{\frac{gR_1}{\sin 2\theta}} \le v \le \sqrt{\frac{gR_2}{\sin 2\theta}} \right) =$$

$$= \frac{1}{v_0} \int_{\sqrt{\frac{gR_1}{\sin 2\theta}}}^{\sqrt{\frac{gR_2}{\sin 2\theta}}} e^{-v/v_0}\, dv = \int_{\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gR_1}{\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gR_2}{\sin 2\theta}}} e^{-x}\, dx \Rightarrow$$

$$\boxed{P = e^{-\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gR_1}{\sin 2\theta}}} - e^{-\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{gR_2}{\sin 2\theta}}}}$$

PROBLEM No2



$$P(R/K) = \frac{D + K(m-1)}{N + n(m-1)}$$

$$P(R) = \sum_{k=0}^{n} P(R/k) \underbrace{P(X=k)}_{} =$$

$$\downarrow$$

$$\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{D}{N+n(m-1)} P(X=k) + \frac{(m-1)}{N+n(m-1)} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k P(X=k)}_{E[X] = \frac{nD}{N}.}$$

$$= \frac{D}{N+n(m-1)} \cdot 1 + \frac{(m-1)nD}{N(N+n(m-1))} = \frac{D}{N}.$$

THE ANSWER DOES NOT DEPEND ON NUMBER m of copies!

PROBLEM No3

A, B $\quad X \sim Bin(n, p) \Rightarrow X = \sum_{j=1}^{n} x_j$ ← INDEPENDENT BERNOULLI VARIABLES $x_j \sim Ber(p)$.

$$Y \sim Bin(m, p)$$

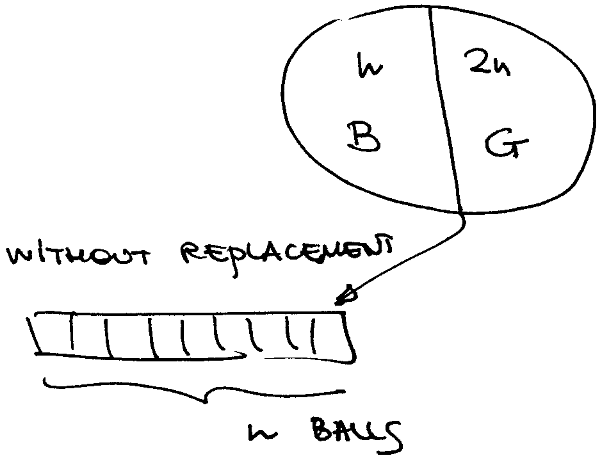
$$\Rightarrow Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j, \quad Y_j \sim Ber(p).$$

$$Z = X + Y = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{m} Y_j}_{\substack{n+m \text{ Bernoulli} \\ \text{variables (indepen-} \\ \text{dent).}}} \sim Bin(n+m, p).$$

ALLOWED VALUES ARE: $0, 1, \ldots, n+m$

$$P(Z=k) = C_{n+m}^{k} p^k (1-p)^{n+m-k}$$

PROBLEM No 4



A. $$P(N_B=j, N_G=k) = \begin{cases} \dfrac{C_n^j C_{2n}^k}{C_{3n}^n}, & \text{if } k+j=n \\ 0, & \text{if } k+j\neq n. \end{cases}$$

(Hypergeometric stuff).

B. MARGINAL FUNCTIONS:

$$P(N_B=j) = \sum_{k=0}^{n} P(N_B=j, N_G=k) = \frac{C_n^j C_{2n}^{n-j}}{C_{3n}^n}$$

(ONLY $k=n-j$ CONTRIBUTES THE SUM).

SIMILARLY,

$$P(N_G=k) = \sum_{j=0}^{n} P(N_B=j, N_G=k) =$$

$$= \frac{C_n^{n-k} C_{2n}^k}{C_{3n}^n}$$

C. N_B AND N_G DO DEPEND ON EACH OTHER.
SINCE $P(N_B=j, N_G=k) \neq P(N_B=j)P(N_G=k)$.

ANOTHER WAY: IT ALWAYS HOLDS THAT $N_B+N_G=n$.
SO, THESE VARIABLES HAVE TO BE DEPENDENT!

D. THE MEAN:

$$N_G \sim Hyp(n, D = 2n, N = 3n)$$

$$E[N_G] = n\frac{D}{N} = \frac{2}{3}n$$

$$N_B \sim Hyp(n, D = n; N = 3n)$$

$$E[N_B] = n\frac{D}{N} = \frac{n}{3}.$$

PROBLEM No 5

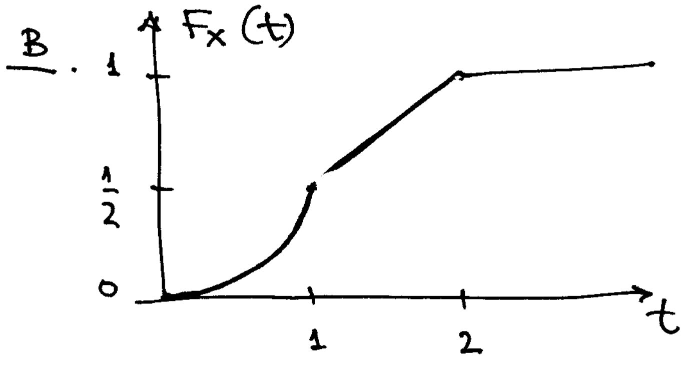
A. WE USE CONTINUITY PROPERTY FOR THE CUMMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE CONTINUOUS RANDOM VARIABLE TO GET:

AT $t = 1$: $\frac{1}{2} = a$

at $t = 2$: $a2^b = c = 1$

So; $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 1$.

B.



C. FIRST, WE CALCULATE THE PROB. DENSITY FUNCTION:

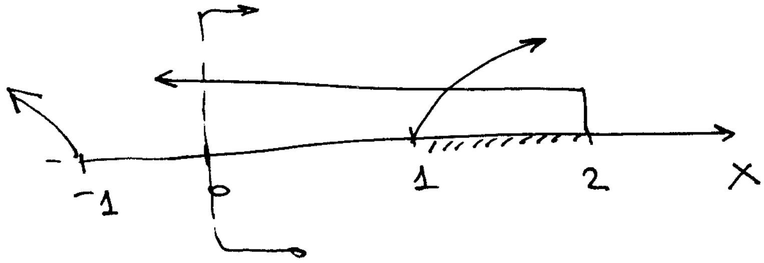
$$f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{4}, & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_0^1 dt \cdot t\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right) + \int_1^2 dt \cdot t \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{24}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 dt \cdot t^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right) + \int_1^2 dt \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{8}$$

$$Var[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2 = \frac{167}{576} \simeq 0.29.$$

D. $$P(X<2 / |X|>1) = \frac{P(X<2 \cap |X|>1)}{P(|X|>1)} =$$



$$= \frac{P(1<X<2)}{P(1<X<2)} = 1.$$

PROBLEM No. 6

A. $\vec{r} = (X_1+Y_1, X_2+Y_2).$

ONE HAS: $r_1 \to X_1+Y_1 \sim N(0, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

$r_2 \to X_2+Y_2 \sim N(0, \sigma_X^2+\sigma_Y^2).$

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2+r_2^2}$$

$$P(|\vec{r}| \geq R) = P(r_1^2+r_2^2 \geq R^2)$$

INTRODUCE $Z_1 = \frac{r_1}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}$ & $Z_2 = \frac{r_2}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}$

THEN,

$$\left.\begin{matrix} Z_1 \sim N(0,1) \\ Z_2 \sim N(0,1) \end{matrix}\right\| \Rightarrow z_1^2+z_2^2 \sim \chi^2(2).$$

HENCE $P(|\vec{r}| \geq R) = P(r_1^2+r_2^2 \geq R^2) =$

$$= P\left(z_1^2+z_2^2 \geq \frac{R^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right) = \int_{\frac{R^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}^{\infty} dt\, f_{\chi^2}(t; n=2)$$

AS SOON AS $f_{\chi^2}(t; n=2) = \frac{1}{2} e^{-t/2} \theta(t)$,

WE OBTAIN:

$$\boxed{P(|\vec{r}| \geq R) = \frac{1}{2} \int_{\frac{R^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}^{\infty} dt\, e^{-t/2} = e^{-\frac{R^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}.}$$

IT'S EASY TO SEE THAT THE SAME ANSWER HOLDS FOR THE DIFFERENCE $\vec{X}-\vec{Y}$.