



תאריך: 06.12.04
סמסטר א' תשס"ה

ת.ז. 000 000 000

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 20019

הוראות הבוחן:

1. משך הבוחן: שעתיים.
2. חלק ראשון: עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
3. חלק שני: עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
4. חומר עזר: דף הנוסחאות המצורף.

חלק ראשון

יש לתת תשובות בטופס זה. ערך כל שאלה 5 נקודות

01. מלא/י את הטבלה

	הגדרה:	טענה
מאורעות A ו-B הם מאורעות זרים אם $A \cap B = \emptyset$.		מאורעות A ו-B זרים
מאורעות A ו-B הם מאורעות בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.		מאורעות A ו-B בלתי תלויים
A מוכל ב-B אם כל תוצאה השייכת ל-A שייכת גם ל-B		$A \subset B$

02. נתונים מאורעות A ו-B כלשהם. האם הטענות הבאות נכונות? (יש לרשום כן או לא בלבד)

כן / לא	טענה
לא	$P(A/B) = 1 - P(A/\bar{B})$
כן	$P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/B)$
כן	$P(A/B) = 1 - P(\bar{A}/\bar{B})$
לא	כל הטענות הנ"ל לא נכונות

03. מאורעות A ו- B בלתי תלויים ולא ריקים. האם הטענות הבאות נכונות? (יש לרשום כן או לא בלבד)

טענה	כן / לא
$P(A) = P(A \setminus B) + P(A) \cdot P(B)$	כן
$P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$	לא
$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A) \cdot P(B)$	כן
$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) - P(A) \cdot P(B)$	לא
$P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$	לא

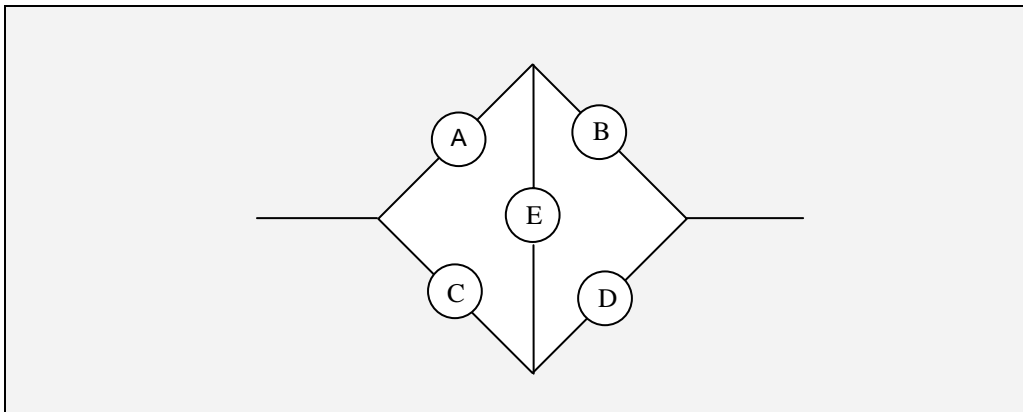
04. עבור המאורעות A ו- B בלתי תלויים, בטא/י את ההסתברות $P(\overline{A}/(A \cup B))$ דרך ההסתברויות $P(A)$ ו- $P(B)$. נא לתת את התשובה הסופית בתא:

$$P(\overline{A}/(A \cup B)) = \frac{P(B) - P(A) \cdot P(B)}{P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)}$$

05. מעגל חשמלי מורכב מיחידות A, B, C, D ו- E . בהנחה כי הסתברות המאורע $Q = \{\text{מעגל כולו פעול}\}$ ניתן על ידי הנוסחה

$$P(Q) = P((A \cup C) \cap (B \cup D)) \cdot P(E) + P((A \cap B) \cup (C \cap D)) \cdot P(\overline{E})$$

צייר/י את המעגל בתא:



06. תן/י את הניסוח של משפט/נוסחה להסתברות שלמה:

אם A_1, A_2, \dots, A_n הם מאורעות זרים בזוגות, כך ש- $A_i \cap A_j = \emptyset$ עבור כל זוג $i \neq j$, ואיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, אזי לכל מאורע B מתקיים:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

סוג ופרמטרים של ההתפלגות	הגדרות הניסוי והמשתנה
$B\left(10, \frac{1}{6}\right)$	ניסוי: הטלת שתי קוביות מאוזנות 10 פעמים. משתנה: $X = \{\text{מספר פעמים בהן יצא סכום של שתי התוצאות השווה ל-7}\}$
$H(11,6,8)$	ניסוי: בחירה אקראית וללא החזרה של 8 כדורים מהכד המכיל 6 כדורים שחורים ו-5 כדורים לבנים. משתנה: $X = \{\text{מספר הכדורים השחורים בין הנלקחים מהכד}\}$
$NB\left(\frac{5}{11}, 2\right)$	ניסוי: הוצאת כדורים אקראית עם החזרה מהכד המכיל 6 כדורים שחורים ו-5 כדורים לבנים. משתנה: $X = \{\text{מספר הכדורים שנלקחו עד הוצאה של הכדור הלבן השני}\}$

חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן

08. מספר רישוי לרכב: בכמה אופנים ניתן למלא 8 תאים באמצעות 26 אותיות לועזיות ו-10 ספרות (0 עד 9) כך ששני התאים הראשונים משמאל יכילו שתי אותיות (מותר שיהיו זהות), חמישה התאים הבאים יכילו רק ספרות המסודרות בסדר יורד, והתא השמיני האחרון יכיל אות אחת אשר חייבת להיות שונה מהאותיות המופיעות בשני התאים משמאל? (15 נק')

נתייחס להרכבת מספר הרישוי כלניסוי תלת שלבי. בשלב הראשון נמלא את התא השמיני באמצעות אחת מהאותיות הלועזיות. קיימות 26 אופציות כאלו. בשלב השני, נמלא חמישה תאים באמצעות הספרות המסודרות בסדר יורד. קיימות $\frac{P_{10}^5}{5!}$ אופציות לעשות זאת. בשלב השלישי, נמלא את שני התאים הראשונים בצד שמאל על ידי שתי אותיות. מספר אופנים עבור זה שווה ל- 25^2 . על פי עקרון הכפל, מקבלים: $25^2 \cdot \frac{P_{10}^5}{5!} \cdot 26$.

09. בקובע עורבבו שלושה קלפים. לקלף הראשון ישנם שני צדדים בצבע אדום, לקלף השני ישנם שני צדדים בצבע שחור ולקלף השלישי ישנם שני צדדים בצבעים שונים – אדום ושחור. קלף אחד נלקח מקובע באקראי ומונח על השולחן. אם ידוע שהצד העליון של הקלף הזה הוא בצבע אדום, מהי ההסתברות שהצד התחתון שלו הוא בצבע שחור? (25 נק')

על פי נתוני השאלה, מרחב המדגם הוא $\Omega = \{ "RR", "BB", "RB" \}$. ההסתברות הנשאלת היא הסתברות מותנית

$$P("B - down" / "R - up") = \frac{P("B - down" \cap "R - up")}{P("R - up")} = \frac{1}{2} \frac{P("RB")}{P("R - up")}$$

על פי נתוני השאלה, $P("RB") = \frac{1}{3}$. לגבי $P("R - up")$ נשתמש במשפט להסתברות שלמה:

$$P("R-up") = P("R-up" / "RR")P("RR") + P("R-up" / "BB")P("BB") + P("R-up" / "RB")P("RB") = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

כתוצאה,

$$P("B-down" / "R-up") = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

10. יהיה X משתנה מקרי פואסון בעל פרמטר λ : $X \sim P(\lambda)$. מצא/י את התוחלת $E[(-1)^X X^2]$.

הערה: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$ (25 נק')

על פי הגדרת התוחלת, יש לחשב: $E[(-1)^X X^2] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(-\lambda)^k}{k!}$

נתבונן

ב- $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(-\lambda)^k}{k!}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(-\lambda)^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(-\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(-\lambda)^k}{(k-1)!} = (-\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \frac{(-\lambda)^m}{m!} \\ &= (-\lambda) \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{(-\lambda)^m}{m!} + \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!}}_{e^{-\lambda}} \right] = (-\lambda) \left[\sum_{m=1}^{\infty} m \frac{(-\lambda)^m}{m!} + e^{-\lambda} \right] \\ &= (-\lambda) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{(m-1)!} + e^{-\lambda} \right] = (-\lambda) \left[(-\lambda) \underbrace{\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^q}{q!}}_{e^{-\lambda}} + e^{-\lambda} \right] \\ &= -\lambda e^{-\lambda} (1 - \lambda). \end{aligned}$$

סך הכל, מקבלים

$$E[(-1)^X X^2] = \lambda(\lambda - 1)e^{-2\lambda}$$