מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 27.10.09
ט' בחשון תש"ע
סמסטר ג' מועד ב'

<u>מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019</u>
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות המבחן

❶ משך המבחן 3 שעות.
❷ עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
❸ <u>נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק</u>.
❹ <u>חומר עזר מוגבל</u> – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
❺ **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ <u>שאלה מס' 1</u>

יהיו X_1 ו— X_2 שורשיה של המשוואה $ax^2+x+c=0$. בהנחה כי המקדמים a ו— c מהווים משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה, $a\sim \mathrm{U}_c(0,1)$ ו— $c\sim \mathrm{U}_c(0,1)$,

א. מצא/י את ההסתברות כי שני השורשים ממשיים.
ב. אם ידוע כי שני השורשים ממשיים, מהי ההסתברות שהם מרוחקים אחד מהשני בלא יותר מי יחידה 1, כלומר $|X_1-X_2|\le 1$?

❖ <u>שאלה מס' 2</u>

יהיו X_1 ו—X_2 שני משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X_1\sim \mathrm{U}_d(1,N)$ ו—$X_2\sim \mathrm{U}_d(1,N)$.

א. מצא/י את פונקצית ההסתברות של המשתנה $X=X_1-X_2$.
ב. ודא/י כי תכונת הנרמול עבור פתרונך מתקיימת.

<u>הערה</u>: לידיעתך, $\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}$.

❖ <u>**שאלה מס' 3**</u>

בין האיברים המתקבלים לאחר פתיחת הסוגריים בביטוי $\left(\sqrt{t}+\frac{a}{t}-b\right)^7$, ישנם איברים בעלי התבנית $F(a,b)\sqrt{t}$. מצא/י את הפונקציה $F(a,b)$.

❖ <u>**שאלה מס' 4**</u>

לכל המכיל כדור אדום אחד מוסיפים מספר מקרי של כדורים שחורים. ההסתברות שבדיוק k כדורים הוספו היא $P_k=\frac{c^k}{k!}e^{-c}$ עבור $k=0,1,2,\ldots$.

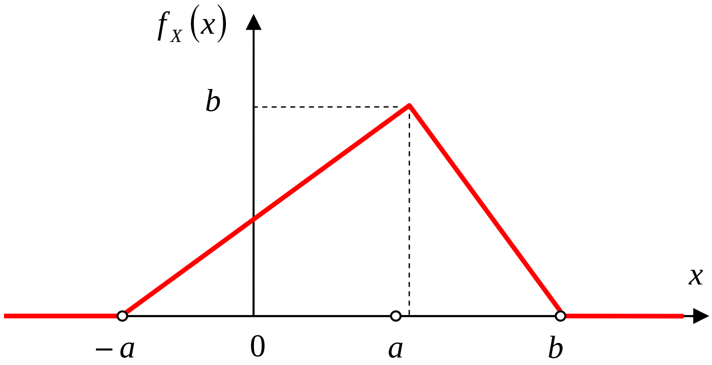
א. נלקח כדור אחד מהכד. מהי ההסתברות שהוא בצבע אדום?

ב. אם ידוע כי הכדור הנלקח הוא בצבע שחור, מהי ההסתברות שהוסיפו בדיוק n כדורים שחורים?

<u>הערה</u>: לידיעתך, $e^x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}$.

❖ <u>**שאלה מס' 5**</u>

יהיה X משתנה מקרי רציף בעל פונקצית הצפיפות $f_X(x)$ שבציור. הפרמטרים a ו- b הם אי-שליליים.



א. רשום/רשמי את הביטוי עבור פונקצית הצפיפות $f_X(x)$ ומצא/י את הקשר בין הפרמטרים a ו- b.

ב. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$.

ג. מצא/י את התוחלת $E[X]$. יש לבטא את התשובה דרך הפרמטר b בלבד.

❖ <u>**שאלה מס' 6**</u>

מעגל חשמלי מורכב משש יחידות הפועלות ללא תלות. המאורע Q = {מעגל כולו פעול} ניתנת על ידי הנוסחא

$$P(Q)=P((A\cup C)\cap(B\cup D)\cap(E\cup F))+P\left((A\cap B)\cup(C\cap D)/(\bar{E}\cap\bar{F})\right)\cdot(1-P(E\cup F))$$

צייר/י את המעגל. נמק/י את תשובתך.

בהצלחה!

PROBLEM No 1

$$\left.\begin{array}{l} a \sim U_c(0,1) \\ c \sim U_c(0,1) \end{array}\right| \text{ statistically independent}$$

$$ax^2+x+c=0$$

THE ROOTS:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{1-4ac}}{2a}$$

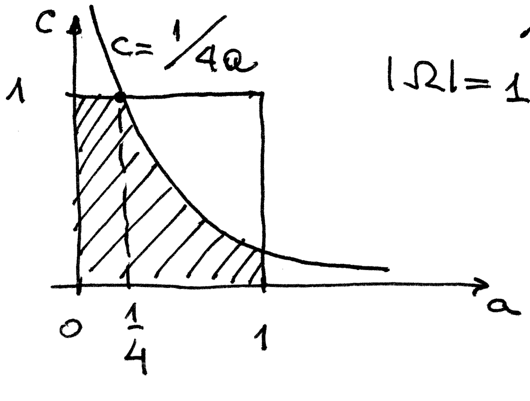
A. THE PROBABILITY TO HAVE ALL ROOTS REAL IS

$$P_R = P\left(1-4ac \geq 0\right) = P\left(c \leq \frac{1}{4a}\right).$$

CLASSICAL APPROACH TO PROBABILITY YIELDS:

$$P_R = \frac{\left|\{c \leq 1/4a\}\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}\cdot 1 + \int_{1/4}^{1} \frac{da}{4a} = \frac{1+\log 4}{4} \simeq 0.597$$

$|\Omega| = 1\times 1 = 1$



B. THE PROBABILITY TO BE CALCULATED IS

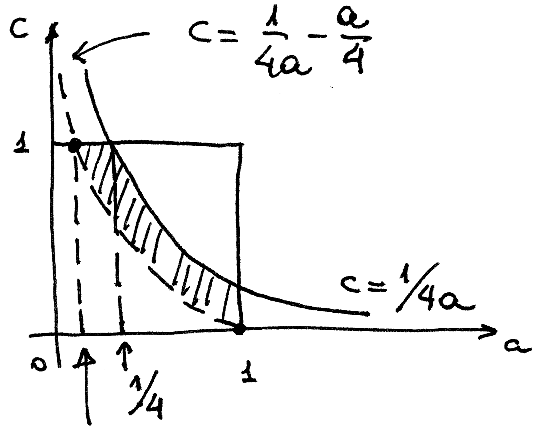
$$P_B = P\left(|x_1-x_2| \leq 1 \,/\, c \leq \frac{1}{4a}\right) = P\left(\frac{\sqrt{1-4ac}}{a} \leq 1 \,/\, c \leq \frac{1}{4a}\right) = \ldots$$

$$\frac{\sqrt{1-4ac}}{a}$$

$$c \geq \frac{1}{4a} - \frac{a}{4}$$

$$\ldots = \frac{P\left(\left\{c \geq \frac{1}{4a} - \frac{a}{4}\right\} \cap \left\{c \leq \frac{1}{4a}\right\}\right)}{P\left(c \leq \frac{1}{4a}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(\frac{1}{4a} - \frac{a}{4} \leq c \leq \frac{1}{4a}\right)}{P\left(c \leq \frac{1}{4a}\right)}$$



$\sqrt{5}-2$ [Indeed, it can be found from the equation $\frac{1}{4a} - \frac{a}{4} = 1$].

Hence,

$$P\left(\frac{1}{4a} - \frac{a}{4} \leq c \leq \frac{1}{4a}\right) = \boxed{\frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{da}{4a}} \xrightarrow{} P\left(c \leq \frac{1}{4a}\right)$$

$$- \left[(\sqrt{5}-2)\cdot 1 + \int_{\sqrt{5}-2}^{1} da \left(\frac{1}{4a} - \frac{a}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1+\log 4}{4} - \left[\sqrt{5}-2 + \frac{1}{4}\left(\frac{(\sqrt{5}-2)^2-1}{2} - \log(\sqrt{5}-2)\right)\right]$$

$\simeq 0.118.$

As the result, $P_B = \frac{0.118}{0.597} \simeq 0.197.$

PROBLEM No 2

$$X_1 \sim U_d(1, N) \qquad X = X_1 - X_2$$
$$X_2 \sim U_d(1, N)$$

A. To determine the probability function, $P(X=k)$, WE NEED TO KNOW THE ALLOWED VALUES OF $X = X_1 - X_2$.

THESE ARE

$$k = -(N-1), \dots, 0, \dots, (N-1).$$

THE PROBABILITY FUNCTION EQUALS:

$$P(X=k) = P(X_1 - X_2 = k) = \sum_j P(X_1 = j \cap X_2 = j-k) =$$

$$= \sum_j P(X_1 = j) P(X_2 = j-k)$$

$1 \leq j \leq N$
[Since $X_1 \sim U_d(1,N)$]

$1 \leq j-k \leq N$
[Since $X_2 \sim U_d(1,N)$]

Hence,

$$\begin{cases} 1 \leq j \leq N \\ k+1 \leq j \leq N+k \end{cases}$$

WHENCE WE CONCLUDE THAT

$$\max(1, k+1) \leq j \leq \min(N, N+k).$$

AS THE RESULT,

$$P(X=k) = \sum_{j=\max(1,k+1)}^{\min(N,N+k)} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[\min(N, N+k) - \max(1, k+1) + 1 \right].$$

ONE HAS:

$$P(X=k) = \begin{cases} \dfrac{N+k}{N^2}, & \text{for } -(N-1) \leq k \leq -1 \\ \dfrac{1}{N}, & \text{for } k=0 \\ \dfrac{N-k}{N^2}, & \text{for } 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

THIS CAN BE SUMMARISED IN A SINGLE FORMULA:

$$\boxed{P(X=k) = \frac{N-|k|}{N^2}, \quad -(N-1) \leq k \leq N-1.}$$

B. TO VERIFY THE NORMALISATION, WE COMPUTE THE SERIES

$$\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} P(X=k) = \underbrace{\frac{1}{N}}_{P(X=0)} + \underbrace{2\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{N^2}}_{\substack{P(X=-(N-1))+ \\ +\dots+P(X=-1)+ \\ +P(X=+1)+\dots+P(X=N-1)}} = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{N} + 2\left[\frac{1}{N}\cdot(N-1) - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1} k\right] =$$

$$= \frac{1}{N} + \frac{2(N-1)}{N} - \frac{2}{N^2}\cdot\frac{N(N-1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{N} + \frac{2(N-1)}{N} - \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} = 1.$$

PROBLEM No 3

$$\left(\sqrt{t}+\frac{a}{t}-b\right)^7=\sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0\\ n_3\geq 0\\ \overline{n_1+n_2+n_3=7}}}\frac{7!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\left(\sqrt{t}\right)^{n_1}\frac{a^{n_2}}{\left(\sqrt{t}\right)^{2n_2}}\cdot(-b)^{n_3}$$

$$=\sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0}}\frac{7!}{n_1!\,n_2!\,(7-n_1-n_2)!}\,a^{n_2}\,(-b)^{7-n_1-n_2}\left(\sqrt{t}\right)^{n_1-2n_2}$$

$\longmapsto$ WE ONLY CHOOSE THE TERMS WITH $n_1-2n_2=1$

$$\longmapsto \sqrt{t}\sum_{n_2\geq 0}\frac{7!\;a^{n_2}\,(-b)^{6-3n_2}}{(1+2n_2)!\,n_2!\,(6-3n_2)!}=$$

$$=\sqrt{t}\left[\underbrace{\frac{7!}{1!\,0!\,6!}\,a^0\,(-b)^6}_{n_2=0}+\underbrace{\frac{7!}{3!\,1!\,3!}\,a^1(-b)^3}_{n_2=1}+\underbrace{\frac{7!}{5!\,2!}\,a^2\,(-b)^0}_{n_2=2}\right]$$

$$=\sqrt{t}\cdot\left[7b^6-140\,ab^3+21\,a^2\right].$$

Problem No 4

A. $$P(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{P(R/k)} \cdot P_k =$$

$$= e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{k+1}} \cdot \frac{c^k}{k!} = e^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{e^{-c}}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-c}}{c} \Big[\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^j}{j!} - 1}_{e^c} \Big] =$$

$$= \frac{1-e^{-c}}{c}.$$ Hence,

$$\boxed{P(R) = \frac{1-e^{-c}}{c}}$$

B. $$P(n/B) = \frac{P(B/n)\, P_n}{P(B)} = \frac{P(B/n)\, P_n}{1-P(R)}$$

Here,

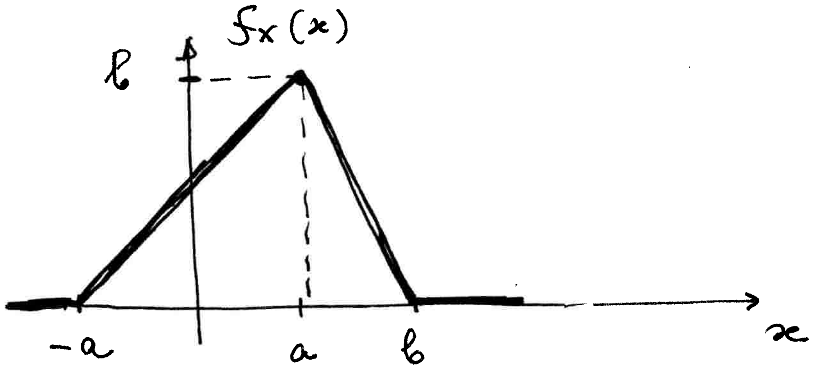
$$P(B/n) = \frac{n}{n+1}, \quad P_n = e^{-c} \frac{c^n}{n!},$$

$$P(R) = \frac{1-e^{-c}}{c}.$$

Substituting everything, we end up with the answer:

$$\boxed{P(n/B) = \frac{n}{(n+1)!} \, \frac{c^n e^{-c}}{1 - \frac{1}{c} + \frac{e^{-c}}{c}}}$$

PROBLEM No 5



A.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a \\ \frac{b}{2a}(x+a), & -a \leq x \leq +a \\ b \cdot \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

TO FIND A RELATION BETWEEN a & b, WE USE THE NORMALISATION CONDITION:

$$\int_{-a}^{b} dx\, f_X(x) = 1.$$

THE INTEGRAL EQUALS THE SUM OF AREAS OF TWO TRIANGLES; SO WE HAVE:

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b + \frac{1}{2}(b-a)b = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a+b = \frac{2}{b}} \text{, OR: (equivalently) } \boxed{a = \frac{2-b^2}{b}}$$

SINCE $\left\{ \begin{matrix} a \geq 0 \\ a < b \end{matrix} \right\}$, WE MUST ADD A RESTRICTION:

$$\boxed{1 < b < \sqrt{2}}$$

B. THE CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION

EQUALS:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} dx\, f_X(x)$$

SIMPLE CALCULATION RESULTS IN:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -a \\ \frac{b}{4a}(t+a)^2, & -a \leq t \leq a \\ 1 - \frac{b}{2(b-a)}(b-t)^2, & a \leq t \leq b \\ 1, & t \geq b \end{cases}$$

C. THE MEAN:

$$E[X] = \int_{-a}^{b} dx \cdot x f_X(x) = \frac{b}{2a}\int_{-a}^{+a} dx \cdot x \cdot (x+a) +$$

$$+ \frac{b}{b-a}\int_{a}^{b} dx . x (b-x) \equiv \frac{b^2(a+b)}{6}.$$

Since $a+b = \frac{2}{b}$, we have:

$$E[X] = \frac{b}{3}.$$

PROBLEM No 6

THE **KEY OBSERVATION** ALLOWING TO SOLVE THE PROBLEM IS SPOTTING THAT $P(Q)$ CAN BE WRITTEN AS A **TOTAL PROBABILITY FORMULA**; SINCE

1)
$$P\big((A\cup C)\cap(B\cup D)\cap(E\cup F)\big)\equiv$$
$$\equiv P\big((A\cup C)\cap(B\cup D)\big)\cdot P(E\cup F).$$

[Here, we have used : $P(a\cap b)=P(a/b)P(b)$].

2)
$$P\Big(\big((A\cap B)\cup(C\cap D)\big)\Big/\underbrace{(\bar{E}\cap\bar{F})}_{\overline{E\cup F}}\Big)\cdot\underbrace{\big[1-P(E\cup F)\big]}_{P(\overline{E\cup F})}=\ldots$$

$$\ldots=P\big((A\cap B)\cup(C\cap D)\big)\cdot P(\overline{E\cup F}).$$

COMBINING THESE TWO FORMULAE TOGETHER, WE SEE THAT

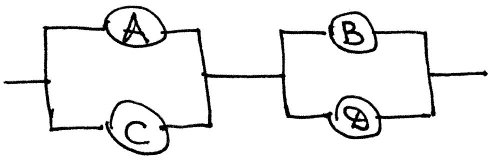
$$P(Q)=P\big((A\cup C)\cap(B\cup D)\big)\cdot P(E\cup F)$$
$$+P\big((A\cap B)\cup(C\cap D)\big)\cdot P(\overline{E\cup F}).$$

COMPARING IT TO

$$P(Q)=P(Q/E\cup F)\,P(E\cup F)+$$
$$+P(Q/\overline{E\cup F})\,P(\overline{E\cup F}),$$

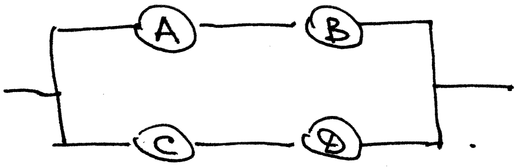
WE CONCLUDE THAT:

Q/ $E \cup F \equiv (A \cup C) \cap (B \cup D)$



AND

Q/ $\overline{E \cup F} \equiv (A \cap B) \cup (C \cap D)$



WE THEN HAVE NO CHOISE BUT ADMIT THAT THE ELECTRIC CIRCUIT IS THIS: