מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

ת"ז
000 000 000

תאריך: 26.08.09
שעה: 18:00
סמסטר ג' תשס"ט

<u>בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019</u>
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות הבוחן

1. משך הבוחן: 90 דקות.
2. חלק ראשון: עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
3. חלק שני: עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
4. חומר עזר: דף נוסחאות המצורף לטופס הבוחן. מותר להיעזר במחשבון.
5. בהצלחה !!

❖ חלק ראשון
יש לתת <u>תשובות בלבד</u> בטופס זה (משקל: 50 נק')

.01 תן/תני שני ניסוחים של עקרון הכפל כמפורט בטבלה. [6 נק']

עקרון הכפל	ניסוח
עבור מספר תוצאות אפשריות בניסוי רב שלבי	<u>מספר</u> התוצאות האפשריות בניסוי רב שלבי ניתן על ידי מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד משלבי הניסוי. כלומר, עבור ניסוי שמתבצע ב— k, מתקיים: $N=\prod_{j=1}^{k} n_j$. כאן, n_j הוא מספר התוצאות האפשריות בשלב ה— j של הניסוי.
עבור הסתברות של ניסוי רב שלבי	<u>ההסתברות</u> של ניסוי רב שלבי עבור המאורע המורכב $B=\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ נתונה על ידי הנוסחה: $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)=P(A_1)\prod_{j=2}^{n} P\left(A_j / \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$.

02. נסח/י את הנוסחא להסתברות שלמה. [6 נק']

אם $A_1, A_2, \ldots, A_n$ הם מאורעות זרים בזוגות, כך ש- $A_i \cap A_j = \varnothing$ עבור כל זוג $i \neq j$, ואיחודם הוא כל מרחב המדגם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, אזי לכל מאורע B מתקיים: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$.

03. נתבונן בהסתברות $P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A)$. סמן/י ב- √ את הזהות הנכונה בהנחה כי המאורעות B_1 ו— B_2 הם מאורעות זרים. [6 נק']

סמן/י כאן	ביטוי
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A) = P(\overline{B_1}/A)P(\overline{B_2}/A)$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A) = \frac{P(A \cup B_1) + P(A \cup B_2)}{P(A)}$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A) = \frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)}$
√	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A) = 1 - \frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)}$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A) = 1 - \frac{P(A \cup B_1) + P(A \cup B_2)}{P(A)}$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)}/A) = 1 - P(B_1/A)P(B_2/A)$

04. תן/י את הניסוח של משפט הפרוק: [6 נק']

יהיו X_1, ..., X_n – n משתני ברנולי בלתי תלויים בעלי אותו פרמטר $0 \leq p \leq 1$. אזי המשתנה $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ מפולג בינומית: $X \sim Bin(n,p)$.

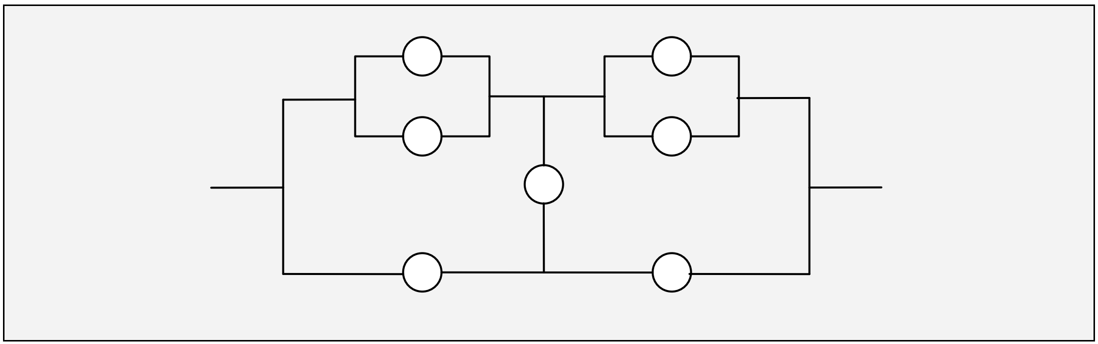
.05 נתבונן בכד המכיל N פריטים וביניהם D פריטים מיוחדים. איך מפולגים משתנים מקריים שמוגדרים בטבלה? [6 נק']

הגדרות הניסוי והמשתנה	סוג ופרמטרים של ההתפלגות
$X=$ {מספר פריטים מיוחדים בין n פריטים שנבחרו מהכד באקראי עם החזרה}	$Bin\left(n,\frac{D}{N}\right)$
$X=$ {מספר פריטים מיוחדים בין n פריטים שנבחרו מהכד באקראי בלי החזרה}	$Hyp(N,D,n)$
$X=$ {מספר פריטים שנלקחו מהכד בלי החזרה עד אשר יתקבל הפריט המיוחד הראשון}	$NegHyp(N,D,m=1)$
$X=$ {מספר פריטים שנלקחו מהכד עם החזרה עד אשר יתקבל הפריט המיוחד הראשון}	$G\left(\frac{D}{N}\right)$

.06 מעגל חשמלי מורכב משבע יחידות הפועלות ללא תלות. המאורע $Q=$ {מעגל כולו פעול} ניתנת על ידי הנוסחא

$$P(Q)=[P((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap(B_1\cup B_2\cup B_3))-P(((A_2\cup A_3)\cap(B_2\cup B_3))\cup(A_1\cap B_1))]\cdot P(C)$$
$$+P(((A_2\cup A_3)\cap(B_2\cup B_3))\cup(A_1\cap B_1))$$

צייר/י את המעגל בתא [12 נק'].



.07 מהי ההסתברות שבכיתה המונה $n\geq 2$ סטודנטים לפחות שניים נולדו בשבת? יש לרשום רק את התשובה הסופית ללא סימן הסכום ($\sum$) [8 נק']

$$1-\left(\frac{6}{7}\right)^n-\frac{n}{7}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

חלק שני

יש לתת __פתרון מלא__ במחברת הבוחן (משקל: 50 נק')

08. בכיסו המהמר ישנם שני מטבעות: מטבע ראשון הוא מטבע מאוזן תקני עם עץ ופלי עליו; מטבע שני הוא מטבע מאוזן אך מזויף עם עץ בשני צדדיו.

א. המהמר מוציא באקראי מטבע אחד מכיסו ומטיל אותו פעם אחת. במידה ונתקבל עץ, מהי ההסתברות שזה מטבע מזויף? [15 נק']

ב. המהמר מטיל מטבע שהוצא מכיסו n פעמים וכל פעם מתקבל עץ. מהי ההסתברות שזה מטבע מזויף? [15 נק']

__פתרון__. ישנם שני מטבעות: מטבע A -- מאוזן ותקין ומטבע F -- מזויף.

__סעיף א'__. יש לחשב את ההסתברות $P(F/H)$ (כאן H מסמן את התוצאה "עץ"). על פי נוסחת בייס,

$$P(F/H)=\frac{\overbrace{P(H/F)}^{=1}\overbrace{P(F)}^{=1/2}}{P(H)}=\frac{1}{2P(H)}.$$

על מנת לחשב את ההסתברות $P(H)$, נשתמש בנוסחא להסתברות שלמה:

$$P(H)=\underbrace{P(H/A)}_{=1/2}\underbrace{P(A)}_{=1/2}+\underbrace{P(H/F)}_{=1}\underbrace{P(F)}_{=1/2}=\frac{3}{4}.$$

כתוצאה, $P(F/H)=\frac{2}{3}$.

__סעיף ב'__. יש לחשב את ההסתברות $P(F/\underbrace{H...H}_{n})$. הכללה פשוטה של הפתרון הקודם מביאה:

$$P(F/\underbrace{H...H}_{n})=\frac{\overbrace{P(\underbrace{H...H}_{n}/F)}^{=1}\overbrace{P(F)}^{=1/2}}{P(\underbrace{H...H}_{n})}=\frac{1}{2P(\underbrace{H...H}_{n})}$$

ו—

$$P(\underbrace{H...H}_{n})=\underbrace{P(\underbrace{H...H}_{n}/A)}_{=(1/2)^n}\underbrace{P(A)}_{=1/2}+\underbrace{P(\underbrace{H...H}_{n}/F)}_{=1}\underbrace{P(F)}_{=1/2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

כך ש— $P(F/\underbrace{H...H}_{n})=\frac{2^n}{2^n+1}$.

ניתן לראות כי עבור $n=1$ תוצאה זו שחזרת את התשובה $P(F/H)=\frac{2}{3}$ לסעיף א'.

.09 בין האיברים המתקבלים לאחר פתיחת הסוגריים בביטוי $\left(t+\frac{a}{\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right)^5$**, ישנם איברים בעלי התבנית** $\sqrt{t}\cdot F(a,b)$**. מצא/י את הפונקציה** $F(a,b)$**.** [20 נק']

<u>פתרון</u>. על פי הנוסחא המולטינומית,

$$\left(t+\frac{a}{\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right)^5=\sum_{\substack{n_1\ge 0\\ n_2\ge 0\\ n_3\ge 0\\ \overline{n_1+n_2+n_3=5}}}\frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}t^{n_1}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)^{n_2}\left(-b\sqrt{t}\right)^{n_3}=\sum_{\substack{n_1\ge 0\\ n_2\ge 0\\ n_3\ge 0\\ \overline{n_1+n_2+n_3=5}}}\frac{5!}{n_1!n_2!n_3!}t^{n_1+\frac{1}{2}(n_3-n_2)}a^{n_2}(-b)^{n_3}$$

$$=\sum_{\substack{n_1\ge 0\\ n_2\ge 0}}\frac{5!}{n_1!n_2!(5-n_1-n_2)!}t^{\frac{1}{2}(5+n_1)-n_2}a^{n_2}(-b)^{5-n_1-n_2}$$

האיברים בעלי התבנית $\sqrt{t}\cdot F(a,b)$ **מתקבלים כאשר** $\frac{1}{2}(5+n_1)-n_2=\frac{1}{2}$**. במילים אחרות, אנו מעוניינים באינדקסים** $n_1=2n_2-4$ **כך ש—**

$$\left(t+\frac{a}{\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right)^5=\sum_{\substack{n_1\ge 0\\ n_2\ge 0}}\frac{5!}{n_1!n_2!(5-n_1-n_2)!}t^{\frac{1}{2}(5+n_1)-n_2}a^{n_2}(-b)^{5-n_1-n_2}\Bigg|_{n_1=2n_2-4}$$

$$\mapsto t^{\frac{1}{2}}\sum_{n_2\ge 0}\frac{5!}{(2n_2-4)!n_2!(9-3n_2)!}a^{n_2}(-b)^{9-3n_2}$$

ניתן לראות כי רק $n_2=2$ **ו—**$n_2=3$ **תורמים לסכום הדרוש:**

$$F(a,b)=\underbrace{\frac{5!}{2!3!}a^2(-b)^3}_{n_2=2}+\underbrace{\frac{5!}{2!3!}a^3}_{n_2=3}=-10a^2b^3+10a^3.$$

❖ חלק שלישי
נוסחאות לרשותך

\

חוקי הסתברות
• **חוק האיחוד:** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
• **חוק קומוטטיבי:** $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
• **חוק אסוציאטיבי:** $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$.
• **חוק דיסטריבוטיבי:** $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.
• **חוק דה מורגן:** $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
• **הסתברות מותנית:** $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
• **משפט בייס:** $P(A/B)=\dfrac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$.

התפלגות אחידה: $X\sim \mathrm{U}_d(a,b)$, a ו- b מספרים שלמים
• **פונקציית הסתברות:** $P(X=k)=\dfrac{1}{b-a+1}$ עבור $k=a,a+1,\ldots,b$.
• **תוחלת:** $E[X]=\dfrac{a+b}{2}$.
• **שונות:** $\mathrm{var}[X]=\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

התפלגות ברנולי: $X\sim \mathrm{Ber}(p)$, $0\le p\le 1$
• **פונקציית הסתברות:** $P_X(x)=\begin{cases}1-p, & x=0\\ p, & x=1\end{cases}$.
• **תוחלת:** $E[X]=p$.
• **שונות:** $\mathrm{var}[X]=p(1-p)$.

התפלגות בינומית: $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$, $0\le p\le 1$, n מספר שלם חיובי
• **פונקציית הסתברות:** $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ עבור $k=0,1,\ldots,n$.
• **תוחלת:** $E[X]=np$.
• **שונות:** $\mathrm{var}[X]=np(1-p)$.

התפלגות בינומית שלילית: $X \sim \text{NegBin}(m,p)$, $0 \le p \le 1$, m מספר שלם חיובי

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k) = C_{k-1}^{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$ עבור $k = m, m+1, \ldots$.
- **תוחלת:** $E[X] = \frac{m}{p}$.
- **שונות:** $\text{var}[X] = \frac{m(1-p)}{p^2}$.

התפלגות היפרגיאומטרית: $X \sim \text{Hyp}(N,D,n)$, $N \ge 2$, $1 \le D < N$ ו- $1 \le n \le N$

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k) = \frac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$ עבור $0 \le k \le \min(n,D)$.
- **תוחלת:** $E[X] = n\frac{D}{N}$.
- **שונות:** $\text{var}[X] = n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$.

התפלגות היפרגיאומטרית שלילית: $X_m \sim \text{NegHyp}(m;N,D)$, $1 \le m \le D$, $N \ge 2$, $1 \le D < N$

- **פונקצית הסתברות:** $P(X_m = k) = C_{k-1}^{m-1}\frac{C_{N-k}^{D-m}}{C_N^D}$
- **תוחלת:** $E[X_m] = m\frac{N+1}{D+1}$.
- **שונות:** $\text{var}[X_m] = m\frac{N+1}{D+1}\frac{N-D}{D+2}\left(1-\frac{m}{D+1}\right)$

התפלגות פואסון: $X \sim \text{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

- **פונקצית הסתברות:** $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ עבור $k = 0,\ldots,\infty$.
- **תוחלת:** $E[X] = \lambda$.
- **שונות:** $\text{var}[X] = \lambda$.

מספר בחירות

	עם החזרה	בלי החזרה
מסודרת	n^k	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
לא מסודרת	$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$