מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 23.09.09
ה' בְּתִּשְׁרֵי תש"ע
סמסטר ג' מועד א'

מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ **הוראות המבחן**

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ **שאלה מס' 1**

שני ידידים – אלדד וסטיב – קבעו להיפגש בשעה מסוימת בבית קפה. בגלל עומס בדרכים, שניהם אמורים להגיע באיחור. בהנחה כי זמני האיחור (הנמדדים בדקות) של אלדד (T_1) ושל סטיב (T_2) הם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה, $T_1 \sim \mathrm{U_c}(0,T)$ ו— $T_2 \sim \mathrm{U_c}(0,T)$, מצא/י את ההסתברות כי אחד יצטרך להמתין לשני לכל היותר t דקות.

❖ **שאלה מס' 2**

יהיו X_1 ו— X_2 שני משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X_1 \sim \mathrm{U}_d(1,N)$ ו— $X_2 \sim \mathrm{U}_d(1,N)$.

א. מצא/י את פונקצית ההסתברות של המשתנה $X = X_1 + X_2$.

ב. ודא/י כי תכונת הנרמול עבור פתרונך מתקיימת.

הערה: לידיעתך, $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

❖ **שאלה מס' 3**

בין האיברים המתקבלים לאחר פתיחת הסוגריים בביטוי $\left(t - \frac{a}{\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)^5$, ישנם איברים בעלי התבנית $\frac{F(a,b)}{\sqrt{t}}$. מצא/י את הפונקציה $F(a,b)$.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619
הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

בקופסה נמצאים n פתקים עם המספרים $1,2,...,n$ עליהם. הוצאו שני פתקים ללא החזרה. יהיו X_1 ו—X_2 שני המספרים שעליהם.

א. מצא/י את פונקצית ההסתברות המשותפת של X_1 ו—X_2.

ב. חשב/י את פונקציות ההסתברות השוליות $P_{X_1}(x_1)$ ו—$P_{X_2}(x_2)$.

ג. נסמן ב— Y את הערך המוחלט $Y=|X_1-X_2|$ של ההפרש בין X_1 לבין X_2. מצא/י את פונקצית ההסתברות $P_Y(y)$ של משתנה מקרי Y וודא/י כי היא מקיימת את תכונת הנרמול.

<u>הערה</u>: לידיעתך, $\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}$.

❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**

משתנה מקרי X מתואר על ידי פונקצית צפיפות ההסתברות $f_X(x)=\frac{1}{2}|x-a|\exp(-|x|)$. כאן, $a\geq 0$.

א. מצא/י את הפרמטר a.

ב. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)=P(X\leq t)$.

ג. חשב/י את התוחלת $\mu_m=E\left[X^m\right]$ עבור כל m חיובי שלם.

<u>הערה</u>: לידיעתך, $\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty dt\ t^\alpha \exp(-t)$.

❖ **<u>שאלה מס' 6</u>**

מעגל חשמלי מורכב משבע יחידות הפועלות ללא תלות. המאורע Q = {מעגל כולו פעול} ניתנת על ידי הנוסחא

$$P(Q)=\left[P\left((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap(B_1\cup B_2\cup B_3)\right)-P\left(((A_2\cup A_3)\cap(B_2\cup B_3))\cup(A_1\cap B_1)\right)\right]\cdot P(C)$$
$$+P\left(((A_2\cup A_3)\cap(B_2\cup B_3))\cup(A_1\cap B_1)\right)$$

צייר/י את המעגל. נמק/י את תשובתך.

בהצלחה!

PROBLEM No 1

LET T be THE WAITING TIME. IT HOLDS THAT $T = |T_1 - T_2|$.
THE PROBABILITY TO BE DETERMINED EQUALS:

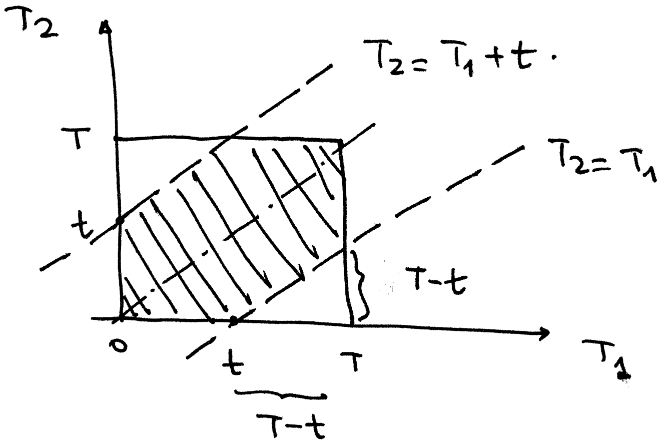
$$P_0 = P(|T_1 - T_2| \leq t) = P(-t \leq T_1 - T_2 \leq t) =$$

$$= P(T_1 - t \leq T_2 \leq T_1 + t)$$

THE CLASSICAL APPROACH TO PROBABILITY is justified since BOTH T_1 AND T_2 ARE UNIFORMLY DISTRIBUTED. HENCE,

$$P_0 = \frac{|\{T_1 - t \leq T_2 \leq T_1 + t\}|}{|\Omega|}$$

THE SIZE OF THE SAMPLE SPACE, $\Omega = T^2$.



$\leftarrow \; 0 \leq t < T$

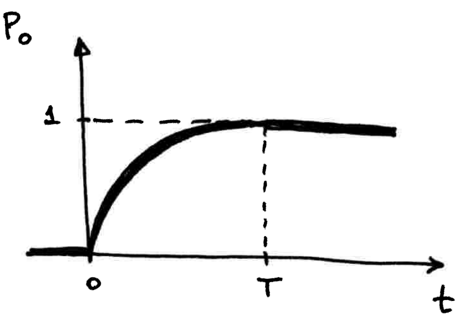
$\downarrow$

$$|\{\ldots\}| = T^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}(T-t)^2.$$

When $t \geq T$, $|\{\ldots\}| = T^2$.

HENCE,

$$P_0 = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, & 0 \leq t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}$$



PROBLEM No2

WE ARE GIVEN TWO INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

$$X_1 \sim U_d(1, N)$$
$$X_2 \sim U_d(1, N)$$

TAKING THE VALUES $j = 1 \dots N$ WITH THE PROBABILITY
$P(X_{1,2} = j) = \frac{1}{N}$.

A. ALLOWED VALUES OF $X = X_1 + X_2$ ARE $k = 2, 3, \dots, 2N$.

THE PROBABILITY FUNCTION IS:

$$P(X=k) = P(X_1 + X_2 = k) = \sum_j P(X_1 = j \cap X_2 = k-j) =$$
$$= \sum_j P(X_1 = j) \cdot P(X_2 = k-j) = \sum_j \frac{1}{N^2}$$

THE SUMMATION BOUNDS ARE DETERMINED BY THE INEQUALITIES:

$$\begin{cases} 1 \le j \le N \\ 1 \le k-j \le N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le j \le N \\ k-N \le j \le k-1 \end{cases}$$

$$\max(1, k-N) \le j \le \min(k-1, N).$$

HENCE,

$$P(X=k) = \frac{1}{N^2}\left[\min(k-1, N) - \max(1, k-N) + 1\right].$$

SINCE,

$$\min(k-1, N) = \begin{cases} k-1, & \text{if } k \le N+1 \\ N, & \text{if } k \ge N+2 \end{cases}$$

AND

$$\max(1, k-N) = \begin{cases} 1, & \text{if } k \leq N+1 \\ k-N, & \text{if } k \geq N+2, \end{cases}$$

WE HAVE:

$$\boxed{P(X=k) = \begin{cases} \frac{k-1}{N^2}, & \text{if } k = 2,3,\dots,N+1 \\ \frac{2N+1-k}{N^2}, & \text{if } k = N+2,\dots,2N. \end{cases}}$$

B. TO VERIFY THE NORMALISATION, WE HAVE TO SUM UP:

$$\sum_{k=2}^{2N} P(X=k) = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{k-1}{N^2} + \sum_{k=N+2}^{2N} \frac{2N+1-k}{N^2}$$

THE FIRST SUM EQUALS:

$$\sum_{k=2}^{N+1} \frac{k-1}{N^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} j = \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N} \qquad (\text{HERE } j=k-1)$$

THE SECOND SUM EQUALS:

$$\sum_{k=N+2}^{2N} \frac{2N+1-k}{N^2} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j) = \frac{1}{N^2}\left[N(N-1) - \frac{N(N-1)}{2} \right] = \frac{N-1}{2N}$$

(HERE $j=k-1-N$).

AS THE RESULT,

$$\boxed{\sum_{k=2}^{2N} P(X=k) = \frac{N+1}{2N} + \frac{N-1}{2N} = 1.}$$

PROBLEM No3

$$\left(t-\frac{a}{\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)^5=\sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0\\ n_3\geq 0\\ \overline{n_1+n_2+n_3=5}}}\frac{5!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\,t^{n_1}\left(-\frac{a}{\sqrt{t}}\right)^{n_2}\left(b\sqrt{t}\right)^{n_3}=$$

$$=\sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0\\ n_3\geq 0\\ \overline{n_1+n_2+n_3=5}}}\frac{5!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\,t^{n_1-\frac{n_2}{2}+\frac{n_3}{2}}\,(-a)^{n_2}\,b^{n_3}=$$

$$=\sum_{\substack{n_1\geq 0\\ n_2\geq 0}}\frac{5!\quad t^{\frac{n_1+5}{2}-n_2}}{n_1!\,n_2!\,(5-n_1-n_2)!}\,(-a)^{n_2}\,b^{5-n_1-n_2}$$

TO FILTER OUT THE TERMS PROPORTIONAL TO $\frac{1}{\sqrt{t}}$, ONE HAS TO SET:

$$\frac{n_1+5}{2}-n_2=-\frac{1}{2}\implies\frac{n_1}{2}+3-n_2=0\implies$$

$$\implies n_1=2n_2-6.$$

HENCE

$$(\ldots)^5\longmapsto\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{n_2\geq 0}\frac{5!\quad(-a)^{n_2}\,b^{11-3n_2}}{(2n_2-6)!\,n_2!\,(11-3n_2)!}=$$

$$=\underbrace{\emptyset}_{n_2=0}+\underbrace{\emptyset}_{n_2=1}+\underbrace{\emptyset}_{n_2=2}+\underbrace{\frac{5!\,(-a)^3\,b^2}{0!\,3!\,2!\,\sqrt{t}}}_{n_2=3}+\underbrace{\emptyset}_{n_2=4,5,6,\ldots}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left[-10\,a^3b^2\right].$$

PROBLEM No 4

A. THE JOINT PROBABILITY FUNCTION EQUALS:

$$P(X_1=k,\ X_2=\ell) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(N-1)}, & k \neq \ell \\ 0, & k=\ell \end{cases}$$

FOR ALL k AND ℓ BETWEEN 1 AND N. THE CORRESPONDING TABLE IS:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	...	N-1	N
1	Ø					
2		Ø				
3			Ø			
⋮				Ø		
N-1					Ø	
N						Ø

$\dfrac{1}{N(N-1)}$

$\dfrac{1}{N(N-1)}$

B. MARGINAL PROBABILITY FUNCTIONS ARE:

$$P(X_1=k) = \frac{1}{N(N-1)} \cdot (N-1) = \frac{1}{N}. \quad \text{FOR} \quad k=1,2,\dots N$$

$$P(X_2=\ell) = \frac{1}{N(N-1)} \cdot (N-1) = \frac{1}{N}, \quad \text{FOR} \quad \ell=1,2,\dots,N.$$

C. TO DETERMINE

$P(Y=|X_1-X_2|=k)$ FOR $k=1,\dots N-1$, WE MAKE USE OF THE ABOVE TABLE: TO DERIVE:

$$P(Y=k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$$

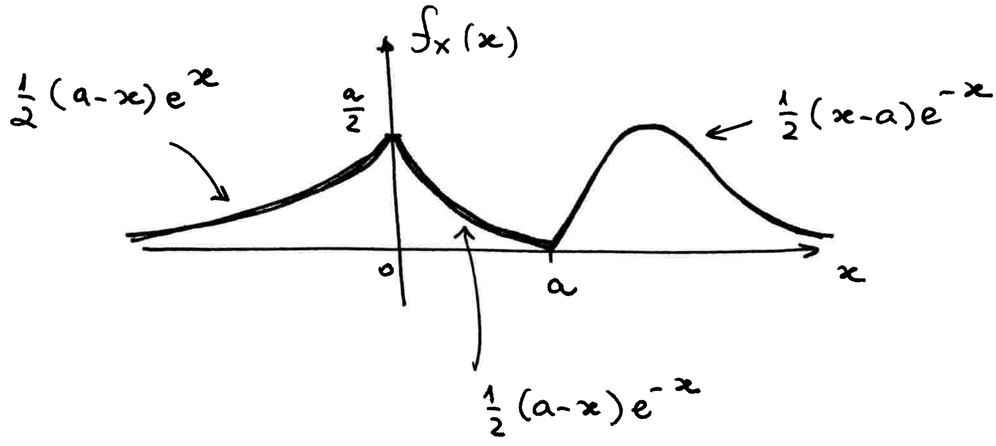
NORMALISATION :

$$\sum_{k=1}^{N-1} P(Y=k) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) = \frac{2}{N(N-1)} \Big[N(N-1) - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} k}_{\frac{N(N-1)}{2}} \Big]$$

$$= \frac{2}{N(N-1)} \cdot \frac{N(N-1)}{2} \equiv 1 .$$

PROBLEM No 5

$$f_X(x) = \frac{1}{2}|x-a|\,e^{-|x|} \quad , \ a \geq 0.$$



A. To determine a, we use the normalisation condition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_X(x) = 1$$

It translates to:

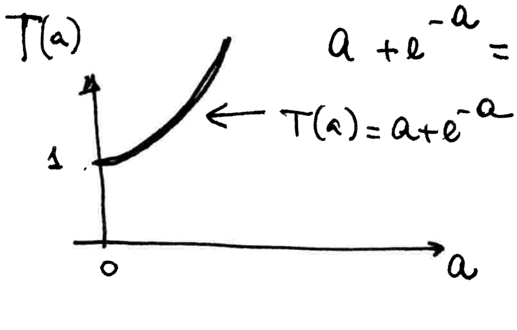
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} dx\,(a-x)e^{x} + \frac{1}{2}\int_{0}^{a} dx\,(a-x)e^{-x} + \frac{1}{2}\int_{a}^{\infty} dx\,(x-a)e^{-x} = 1$$

$$x = -y \qquad\qquad x - a = y$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} dy\,(y+a)e^{-y}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{0}^{a} dx\,(a-x)e^{-x}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} dy\cdot y\cdot e^{-y}}\cdot e^{-a} = 1$$

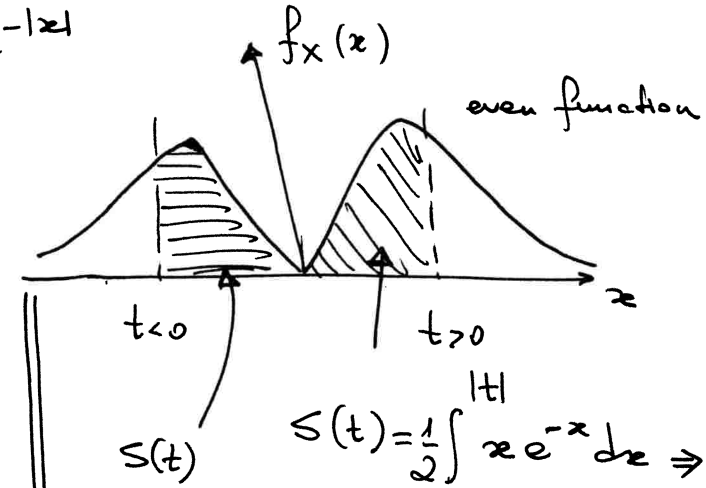
$$\underbrace{\frac{1}{2}\left[\Gamma(2) + a\Gamma(1)\right] + \frac{1}{2}\left(a-1+e^{-a}\right) + \frac{1}{2}e^{-a}\,\Gamma(2)} = 1$$

$$a + e^{-a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 0.}$$



HENCE,

$$f_X(x) = \frac{1}{2}|x|\, e^{-|x|}$$



B. TO CALCULATE

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} dx\, f_X(x),$$

WE INTRODUCE $S(t)$ ⟶

$$S(t) = \frac{1}{2}\int_0^{|t|} x e^{-x}\, dx \Rightarrow$$

$$S(t) = \frac{1}{2}\left[1 - (1+|t|)e^{-|t|}\right].$$

THEN,

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - S(t), & t<0 \\ \frac{1}{2} + S(t), & t\geq 0. \end{cases}$$

SO THAT

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1+|t|}{2} e^{-|t|} \equiv \frac{1-t}{2} e^{t}, & t<0 \\ 1 - \frac{1+t}{2} e^{-t}, & t\geq 0. \end{cases}$$

C.

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot x^m \underbrace{f_X(x)}_{\text{even function}} = \begin{cases} 0, & m = \text{odd} \\ \int_0^{\infty} dx \cdot x^{m+1} e^{-x}, & m = \text{even} \end{cases}$$

HENCE,

$$E[X^m] = \begin{cases} 0, & m = \text{odd} \\ \Gamma(m+2) = (m+1)!, & m = \text{even}. \end{cases}$$

PROBLEM No 6

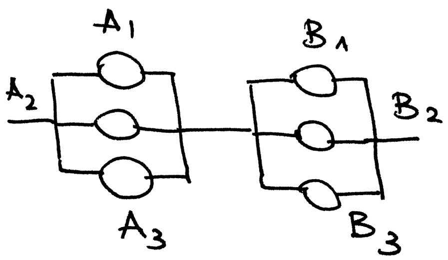
ONE MAY SEE THAT

$$P(Q)= P\Big((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)\Big) \cdot P(c) +$$

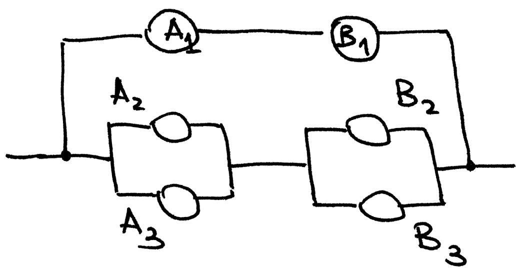
$$+ P\Big(\big((A_2 \cup A_3) \cap (B_2 \cup B_3)\big) \cup (A_1 \cap B_1)\Big) \cdot P(\bar{c}).$$

TWO AUXILIARY CIRCLES CAN BE IDENTIFIED (SINCE THE ABOVE FORMULA IS OF THE TOTAL-PROBABILITY-TYPE):

Q/c :



$Q/\bar{c}$:



ONE THEN READILY CONCLUDES THAT THE CIRCLE Q IS: