



מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 07.05.09
שעה: 13:00
סמסטר ב' תשס"ט

ת"ז

000 000 000

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019
מרצים: ד"ר אווה יגר, פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ **הוראות הבוחן**

- ① משך הבוחן: 45 דקות.
- ② חלק ראשון: עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
- ③ חלק שני: עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
- ④ חומר עזר: דף נוסחאות המצורף לטופס הבוחן. מותר להיעזר במחשבון.
- ⑤ בהצלחה !!

❖ **חלק ראשון**

יש לתת תשובות בלבד בטופס זה (משקל: 60 נק')

01. תן/תני שני ניסוחים של עקרון הכפל כמפורט בטבלה. [12 נק']

ניסוח	עקרון הכפל
<p>מספר התוצאות האפשריות בניסוי רב שלבי ניתן על ידי מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד משלבי הניסוי. כלומר, עבור ניסוי שמתבצע ב-k מתקיים:</p> $N = \prod_{j=1}^k n_j$ <p>כאן, n_j הוא מספר התוצאות האפשריות בשלה ה-j של הניסוי.</p>	<p>עבור מספר תוצאות אפשריות בניסוי רב שלבי</p>
<p>הסתברות של ניסוי רב שלבי עבור המאורע המורכב</p> $B = \bigcap_{j=1}^n A_j$ <p>נתונה על ידי הנוסחה:</p> $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P(A_1) \prod_{j=2}^n P\left(A_j / \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$	<p>עבור הסתברות של ניסוי רב שלבי</p>

גולומב 52, ת.ד. 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס' 03-5026619

52 Golomb St., Holon 58102 Israel

www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619

הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

02. נתבונן בהסתברות $P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A)$. סמני ב- \checkmark את הזהות הנכונה בהנחה כי המאורעות B_1 ו- B_2 הם מאורעות זרים. [12 נק']

סמני כאן	ביטוי
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A) = P(\overline{B_1} / A)P(\overline{B_2} / A)$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A) = \frac{P(A \cup B_1) + P(A \cup B_2)}{P(A)}$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A) = \frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)}$
\checkmark	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A) = 1 - \frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)}$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A) = 1 - \frac{P(A \cup B_1) + P(A \cup B_2)}{P(A)}$
	$P(\overline{(B_1 \cup B_2)} / A) = 1 - P(B_1 / A)P(B_2 / A)$

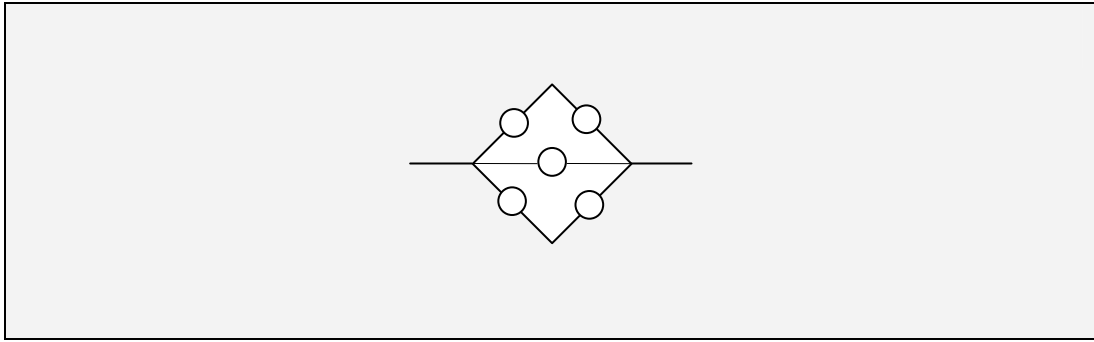
03. נתבונן בכד המכיל N פריטים וביניהם D פריטים מיוחדים. איך מפולגים משתנים מקריים שמוגדרים בטבלה? [12 נק']

סוג ופרמטרים של ההתפלגות	הגדרות הניסוי והמשתנה
$Bin\left(n, \frac{D}{N}\right)$	$X = \{\text{מספר פריטים מיוחדים בין } n \text{ פריטים שנבחרו מהכד באקראי עם החזרה}\}$
$Hyp(N, D, n)$	$X = \{\text{מספר פריטים מיוחדים בין } n \text{ פריטים שנבחרו מהכד באקראי בלי החזרה}\}$
$NegHyp(N, D, m = 1)$	$X = \{\text{מספר פריטים שנלקחו מהכד בלי החזרה עד אשר יתקבל הפריט המיוחד הראשון}\}$
$G\left(\frac{D}{N}\right)$	$X = \{\text{מספר פריטים שנלקחו מהכד עם החזרה עד אשר יתקבל הפריט המיוחד הראשון}\}$

04. מעגל חשמלי מורכב מ-5 יחידות הפועלות ללא תלות ובהסתברות זהה p . ההסתברות למאורע $Q = \{\text{מעגל כולו פעול}\}$ ניתנת על ידי הנוסחה

$$P(Q) = p + P((A \cap B) \cup (C \cap D)) \cdot (1 - p)$$

ציירי את המעגל בתא [24 נק'].



חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן (משקל: 40 נק')

05. בכיסו המהמר ישנם שני מטבעות: מטבע ראשון הוא מטבע מאוזן תקני עם עץ ופלי עליו; מטבע שני הוא מטבע מאוזן אך מזויף עם עץ בשני צדדיו.

א. המהמר מוציא באקראי מטבע אחד מכיסו ומטיל אותו פעם אחת. במידה ונתקבל עץ, מהי ההסתברות שזה מטבע מזויף? [20 נק']

ב. המהמר מטיל מטבע שהוצא מכיסו n פעמים וכל פעם מתקבל עץ. מהי ההסתברות שזה מטבע מזויף? [20 נק']

פתרון. ישנם שני מטבעות: מטבע A -- מאוזן ותקין ומטבע F -- מזויף.

סעיף א'. יש לחשב את ההסתברות $P(F/H)$ (כאן H מסמן את התוצאה "עץ"). על פי נוסחת בייס,

$$P(F/H) = \frac{\overbrace{P(H/F)}^{=1} \overbrace{P(F)}^{=1/2}}{P(H)} = \frac{1}{2P(H)}$$

על מנת לחשב את ההסתברות $P(H)$, נשתמש בנוסחה להסתברות שלמה:

$$P(H) = \underbrace{P(H/A)}_{=1/2} \underbrace{P(A)}_{=1/2} + \underbrace{P(H/F)}_{=1} \underbrace{P(F)}_{=1/2} = \frac{3}{4}$$

$$P(F/H) = \frac{2}{3}, \text{ כתוצאה,}$$

סעיף ב'. יש לחשב את ההסתברות $P(F/H...H)$ הכללה פשוטה של הפתרון הקודם מביאה:

$$P(F/H...H) = \frac{\overbrace{P(H...H/F)}^{=1} \overbrace{P(F)}^{=1/2}}{P(H...H)} = \frac{1}{2P(H...H)}$$

—ו

$$P(\underbrace{H \dots H}_n) = \underbrace{P(\underbrace{H \dots H}_n / A)}_{=(1/2)^n} \underbrace{P(A)}_{=1/2} + \underbrace{P(\underbrace{H \dots H}_n / F)}_{=1} \underbrace{P(F)}_{=1/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$. P(F / \underbrace{H \dots H}_n) = \frac{2^n}{2^n + 1} \text{ — כך ש}$$

ניתן לראות כי עבור $n = 1$ תוצאה זו שחזרת את התשובה $P(F / H) = \frac{2}{3}$ לסעיף א'.