



מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 30.04.08
שעה: 13:00
סמסטר ב' תשס"ח

ת"ז
000 000 000

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ **הוראות הבוחן**

- ① משך הבוחן: 90 דקות.
- ② חלק ראשון: עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
- ③ חלק שני: עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
- ④ חומר עזר: דף נוסחאות המצורף לטופס הבוחן. מותר להיעזר במחשבון.
- ⑤ בהצלחה !!

❖ **חלק ראשון**

יש לתת תשובות בלבד בטופס זה (משקל: 50 נק')

01. תן/תני שני ניסוחים של עקרון הכפל כמפורט בטבלה. [10 נק']

| ניסוח | עקרון הכפל |
|--|---|
| <p>מספר התוצאות האפשריות בניסוי רב שלבי ניתן על ידי מכפלת מספרי התוצאות האפשריות בכל אחד משלבי הניסוי. כלומר, עבור ניסוי שמתבצע ב-k מתקיים:</p> $N = \prod_{j=1}^k n_j$ <p>כאן, n_j הוא מספר התוצאות האפשריות בשלה ה-j של הניסוי.</p> | <p>עבור מספר תוצאות אפשריות בניסוי רב שלבי</p> |
| <p>הסתברות של ניסוי רב שלבי עבור המאורע המורכב</p> $B = \bigcap_{j=1}^n A_j$ <p>נתונה על ידי הנוסחה:</p> $P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P(A_1) \prod_{j=2}^n P\left(A_j / \bigcap_{k=1}^{j-1} A_k\right)$ | <p>עבור הסתברות של ניסוי רב שלבי</p> |

גולומב 52, ת.ד. 305, חולון 58102
טלפון 03-5026560, פקס 03-5026619

52 Golomb St., Holon 58102 Israel

www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6560, Fax. 972-3-502-6619

הפקולטה למדעים
Faculty of Sciences

02. נתבונן בהסתברות $P(A/(B_1 \cup B_2))$. סמך/י ב- \checkmark את הביטוי הנכון בשבילה בהנחה כי המאורעות B_1 ו- B_2 הם מאורעות זרים. [8 נק']

| סמך/י כאן | ביטוי |
|--------------|---|
| | $P(A/B_1) + P(A/B_2)$ |
| | $\frac{P(A \cup B_1) + P(A \cup B_2)}{P(B_1) + P(B_2)}$ |
| \checkmark | $\frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(B_1) + P(B_2)}$ |
| | $P(A \setminus B_1) + P(A \setminus B_2)$ |
| | $\frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(B_1)P(B_2)}$ |

03. תן/י את הניסוח של משפט הפרוק: [8 נק']

יהיו X_1, \dots, X_n משתני ברנולי בלתי תלויים בעלי אותו פרמטר $0 \leq p \leq 1$. אזי המשתנה

$$X = \sum_{k=1}^n X_k$$

מפולג בינומית: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

04. איך מפולגים המשתנים המוגדרים בטבלה? [9 נק']

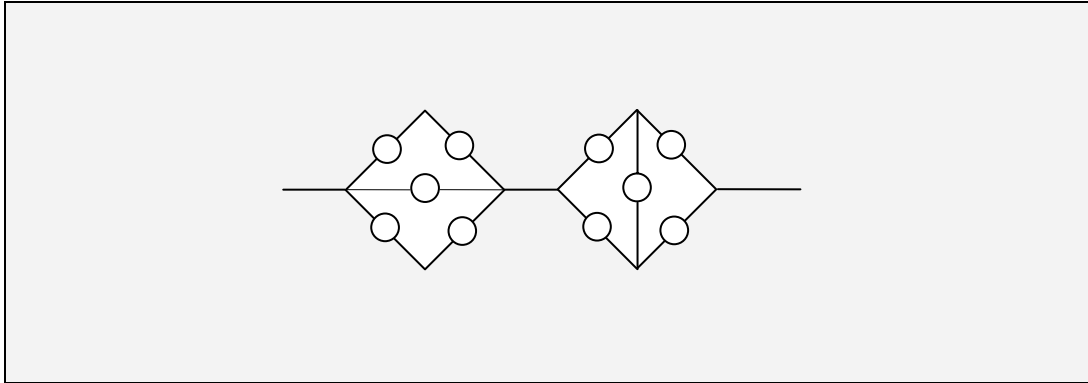
| סוג ופרמטרים של ההתפלגות | הגדרות הניסוי והמשתנה |
|--|--|
| $\text{Bin}\left(k, \frac{2}{5}\right)$ | ניסוי: בחירה מקרית עם החזרה של מספר מהאוסף $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. משתנה: $X = \{\text{מספר "המספרים הראשוניים" בין } k \text{ שנבחרו}\}$. $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. |
| $\text{NegBin}\left(k, \frac{2}{5}\right)$ | ניסוי: בחירה מקרית עם החזרה של מספר מהאוסף $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. משתנה: $X = \{\text{מספר הבחירות עד קבלת "מספר ראשוני" בפעם ה- } k\}$. $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. |
| $\text{Hyp}(15, 6, 5)$ | ניסוי: בחירה מקרית וללא החזרה של מספר מהאוסף $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. משתנה: $X = \{\text{מספר "המספרים הראשוניים" בין חמישה שנבחרו}\}$. $\{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. |

הערה: הספרה 1 הוא לא מספר ראשוני.

05. מעגל חשמלי מורכב מ-10 יחידות הפועלות ללא תלות ובהסתברות זהה p . ההסתברות למאורע $Q = \{\text{מעגל כולו פעול}\}$ ניתנת על ידי הנוסחה

$$P(Q) = P((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5) \\ \cdot \left[P((B_1 \cap B_2) \cup (B_3 \cap B_4)) + p \cdot \underbrace{\left(P(\underbrace{(B_1 \cup B_3) \cap (B_2 \cup B_4)}_{\text{סוגיים}}) - P((B_1 \cap B_2) \cup (B_3 \cap B_4)) \right)}_{\text{סוגיים}} \right]$$

צייר/י את המעגל בתא [15 נק'].



חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן (משקל: 50 נק')

06. נניח כי ההסתברות לכך שמזג האוויר (גשם או שמש) ביום מסוים יהיה כפי שהיה ביום הקודם היא p . נתון שהיום יורד גשם. מהי ההסתברות לכך שבעוד n ימים ירד גשם גם כן? יש להניח כי מזג האוויר ביום מסוים תלוי אך ורק במזג האוויר של היום הקודם. [25 נק']

פתרון. אם היום יורד גשם, הוא ירד בעוד n ימים גם כן אם מספר שינויים (X) במזג האוויר במשך n ימים יהיה מספר זוגי. X הוא משתנה מקרי בעל התפלגות בינומית (ראה/י שאלת כיתה C5.11):

$$X \sim \text{Bin}(n, 1-p)$$

כתוצאה, ההסתברות הדרושה היא $P(X = \text{זוגי})$. בשאלת בית H4.6 הוכחנו כי

$$P(X = \text{זוגי}) = E\left[\frac{1 + (-1)^X}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[(-1)^X]$$

כאן,

$$E[(-1)^X] = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (1-p)^k p^{n-k} = \sum_{k=0}^n \underbrace{C_n^k (p-1)^k p^{n-k}}_{\text{בינום של ביוטון}} = (2p-1)^n$$

אזי, ההסתברות הדרושה היא

$$P(X = \text{זוגי}) = \frac{1 + (2p-1)^n}{2}$$

07. נתבונן בכד המכיל D כדורים אדומים ו- $(N - D)$ כדורים שחורים. בשלב הראשון, הוצאו מהכד באקראי וללא החזרה $2n$ כדורים. במידה ומספר הכדורים האדומים (בין $2n$ שנלקחו) היה זהה למספר הכדורים השחורים, הוחזרו $2n$ הכדורים חזרה לכד, ללא כל שינוי. בכל מקרה אחר, הוחלפו צבעי של $2n$ הכדורים שנלקחו (כל כדור אדום נצבע בצבע שחור וכל כדור שחור נצבע בצבע אדום) ורק לאחר מכן הוחזרו $2n$ הכדורים (בצבעים חדשים) חזרה לכד.

במצב החדש נלקח כדור אחד מהכד. מהי ההסתברות שהוא יהיה בצבע אדום? [25 נק']

פתרון. ברור כי המקרה הראשון (מספר הכדורים האדומים בין $2n$ שנלקחו הוא זהה למספר הכדורים השחורים) ניתן לכלול למקרה השני כי במקרה הראשון החלפת צבעים אינה משנה דבר. אזי:

א' נסמן ב- X את מספר הכדורים האדומים בין $2n$ שנלקחו מהכד בשלב הראשון. בהנחה כי $X = k$ (כאן $0 \leq k \leq 2n$), תוכן הכד לאחר לקיחת כדורים הוא $D - k$ כדורים אדומים ו- $(N - D - (2n - k))$ כדורים שחורים.

ב' לאחר החלפת צבעים של $2n$ הכדורים שנילקחו, ישנם $2n - k$ כדורים אדומים ו- k כדורים שחורים.

ג' לאחר הוספת כדורים אלה (בצבעים חדשים) לכד, מצבו הוא: $D - k + (2n - k) = D + 2n - 2k$ כדורים אדומים ו- $N - D - (2n - k) + k = N - D - 2n + 2k$ כדורים שחורים. קל לראות כי סך הכל מספר הכדורים בכד לא השתנה.

ד' אם עכשיו נוציא כדור אחד מהכד, ההסתברות שצבעו אדום היא הסתברות מותנית (ראה/י שאלת כיתה C5.10):

$$P(R/k) = \frac{D + 2n - 2k}{N}$$

ההסתברות הדרושה היא הסתברות שלמה

$$\begin{aligned} P(R) &= \sum_{k=0}^{2n} P(R/k)P(X=k) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{D + 2n - 2k}{N} P(X=k) \\ &= \frac{D + 2n}{N} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} P(X=k)}_{=1 \text{ נרמול}} - \frac{2}{N} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} kP(X=k)}_{\text{תוחלת}} \\ &= \frac{D + 2n}{N} - \frac{2}{N} \cdot 2n \frac{D}{N} = \frac{D + 2n}{N} - \frac{4nD}{N^2}. \end{aligned}$$

כאן השתמשנו בעובדה כי $X \sim Hyp(N, D, 2n)$.