מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 23.06.2008
כ' בְּסִיוָן תשס"ח
סמסטר ב' מועד א'

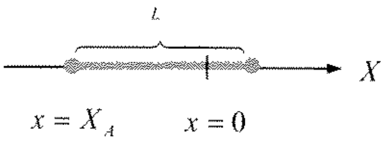
מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019
מרצה: פרופ' יוג'ין קנציפר

❖ הוראות המבחן

❶ משך המבחן 3 שעות.
❷ עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
❸ נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.
❹ חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://www.hit.ac.il/staff/kanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
❺ בהצלחה!

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1



מקל בעל אורך L ממוקם בנקודה X_A השייכת לציר X (ראה/י ציור). בהנחה כי X_A ו-L הם שני משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה, $X_A \sim \mathrm{U_c}(-a,+a)$ ו-$L \sim \mathrm{U_c}(0,b)$, מצא/י את ההסתברות כי הנקודה $x = 0$ שייכת למקל.

❖ שאלה מס' 2

יוסי ורועי משחקים עם שני מטבעות. מטבע של יוסי הוא מטבע מוטה בעל הסתברות p_1 לקבלת התוצאה "עץ" בהטלה בודדת. מטבע של רועי הוא גם מטבע מוטה אך בעל הסתברות p_2 לקבלת התוצאה "עץ" בהטלה בודדת. כל אחד מטיל מטבע משלו עד קבלת התוצאה "עץ" בפעם הראשונה. הראשון מהם שמגיע לתוצאה "עץ" זוכה במשחק.

א. מהי ההסתברות לתיקו?
ב. מהי ההסתברות שיוסי ינצח?

<u>הערה</u>: עבור $|q|<1$ ו-m שלם, מתקיים: $\sum_{j=m}^{\infty} q^j = \frac{q^m}{1-q}$.

❖ **<u>שאלה מס' 3</u>**

יהיה X משתנה מקרי רציף בעל פונקצית צפיפות ההסתברות

$$f_X(x)=\begin{cases} a\,e^x, & x<0,\\ b\,|x-1|, & 0\le x<2\\ c, & x\ge 2\end{cases}$$

כאן, הפרמטרים a, b ו—c אינם ידועים.

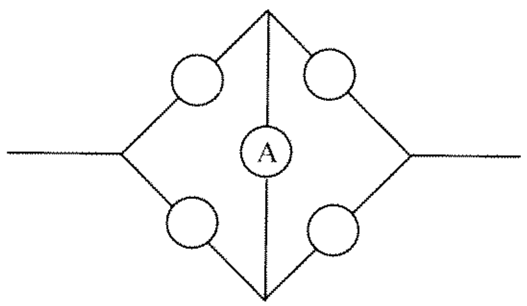
א. מצא/י את הפרמטרים a, b ו—c בהנחה כי $E[X]=0$.

ב. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$.

ג. מהי השונות $\mathrm{var}[X]$?

❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

נתונים שני כדים: הראשון מכיל N_1 כדורים וביניהם D_1 כדורים אדומים. השני מכיל N_2 כדורים וביניהם D_2 כדורים אדומים. מהכד הראשון נלקחו n_1 כדורים <u>ללא החזרה</u> והוכנסו לכד השני. לאחר שהכדורים בכד השני עורבבו היטב, הוצאו ממנו שני כדורים <u>עם החזרה</u>. מהי ההסתברות שאחד מהם בצבע אדום והשני בצבע שחור?



❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**

במעגל חשמלי כל היחידות פועלות ללא תלות בהסתברויות זהות ושוות ל— p. אם ידוע כי מעגל כולו פועל, מצא/י את ההסתברות כי היחידה A פועלת.

❖ **<u>שאלה מס' 6</u>**

וקטור מהירות $\vec{v}=(v_X,v_Y)$ של חלקיק שנע במישור מתואר על ידי הרכיבים v_X ו—v_Y. בהנחה כי שניהם מהווים משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים, $v_X\sim N(0,\sigma^2)$ ו—$v_Y\sim N(0,\sigma^2)$, חשב/י

א. את פונקצית צפיפות ההסתברות $f_K(x)$ של אנרגיה קינטית $K=\dfrac{mv^2}{2}$ של החלקיק.

ב. את פונקצית צפיפות ההסתברות $f_V(v)$ של מהירות $v=\sqrt{v_X^2+v_Y^2}$ של החלקיק.

ג. את התוחלות $E[K]$ ו—$E[v]$.

בהצלחה!

PROBLEM #1

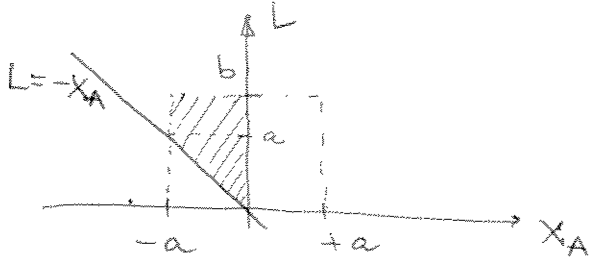
$$\left.\begin{array}{l} X_A \sim U_c(-a,+a) \\ L \sim U_c(0,b) \end{array}\right\}$$ INDEPENDENT RANDOM VARIABLES.

THE PROBABILITY TO HAVE $x=0$ INSIDE THE STICK IS

$$P_0 = P(X_A<0 \cap X_A+L>0) = \frac{|X_A<0 \cap X_A+L>0|}{|\Omega|}$$

HERE,
$|\Omega| = 2ab$ (SEE THE FIGURE BELOW)

- CASE No.1 $\quad a<b$



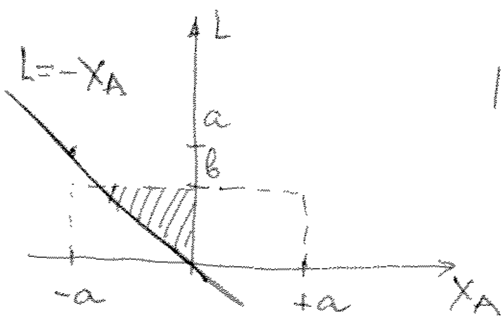
$X_A<0$ & $L>-X_A$

$|X_A<0 \cap X_A+L>0| =$

$= ab - \frac{1}{2}a^2.$

HENCE, $P_0 = \dfrac{ab-\frac{1}{2}a^2}{2ab} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{4b}.$

- CASE No2 $\quad a \geq b$



$|X_A<0 \cap X_A+L>0| = \dfrac{b^2}{2}$

$P_0 = \dfrac{b^2/2}{2ab} = \dfrac{b}{4a}.$

FINAL ANSWER:

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{4b}, & a<b \\ \dfrac{b}{4a}, & a \geq b. \end{cases}$$

PROBLEM #2

LET X_1 BE A NUMBER OF COIN FLIPS UNTIL YOSSI GETS H; X_2 IS A NUMBER OF COIN FLIPS UNTIL ROYI GETS H.

THEN,

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim G(p_1) \\ X_2 \sim G(p_2) \end{array}\right] \text{ INDEPENDENT RANDOM VARIABLES.}$$

A. THE PROBABILITY OF THE DRAW IS

$$P_0 = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = k).$$

SINCE FOR $X \sim G(p)$, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k \geq 1)$,

WE DERIVE:

$$P_0 = p_1 p_2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1}}_{\text{GEOMETRIC SERIES}} = p_1 p_2 \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

B. LIKEWISE, THE PROBABILITY TO HAVE YOSSI AS A WINNER IS

$$P_0' = P(X_1 < X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) P(X_2 > k)$$

FOR $X \sim G(p)$,

$$P(X > k) = (1-p)^k$$

HENCE,

$$P_0' = p_1 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_1)^{k-1} (1-p_2)^k =$$

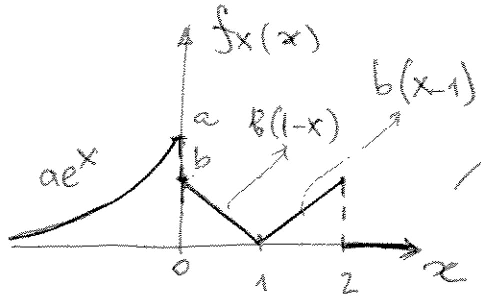
$$= p_1(1-p_2) \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p_1)(1-p_2)]^{k-1} = p_1(1-p_2) \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

PROBLEM #3

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^x, & x<0 \\ b|x-1|, & 0 \le x < 2 \\ c, & x \ge 2 \end{cases}$$

A. FOR THE NORMALISATION TO HOLD, WE MUST SET C TO ZERO: C=0. THEN

$$\int_{-\infty}^{0} ae^x dx + b\int_0^2 dx\, |x-1| = 1.$$



$$ae^x\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{b}{2}\cdot 2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a+b=1} \quad (*)$$

A SECOND EQUATION FOLLOWS FROM $E[X]=0$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{0} dx\cdot x\cdot ae^x + b\int_0^1 dx\cdot x\,(1-x) + b\int_1^2 dx\cdot x(x-1)$$

ONE HAS:

$$a\int_{-\infty}^{0} dx\, x\, e^x = ae^x(x-1)\Big|_{\infty}^{0} = -a$$

$$b\int_0^1 dx\, x(1-x) = b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = \frac{b}{6}$$

$$-b\int_1^2 dx\, x(1-x) = -b\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = -b\left[2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{5b}{6}$$

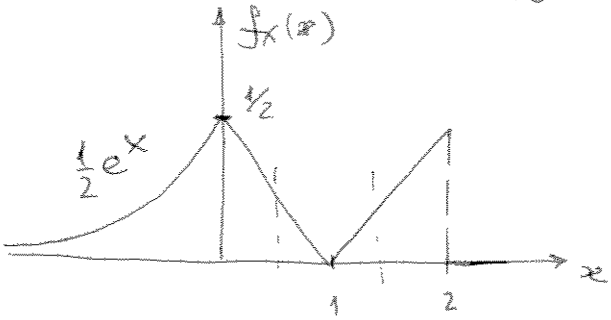
HENCE, $E[X] = b - a = 0 \Rightarrow \boxed{a=b} \quad (**)$

EQUATIONS (*) AND (**) LEAD US TO CONCLUDE THAT

$$\boxed{a=b=\frac{1}{2}}$$

B CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION:

$$F_X(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx .$$



$$F_X(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}e^x dx = \frac{1}{2}e^t, & t<0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{(1-t)^2}{4} = \frac{3}{4} - \frac{(1-t)^2}{4}, & 0 \le t < 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{(t-1)^2}{4}, & 1 \le t < 2 \\ 1, & t \ge 2 . \end{cases}$$

C. VARIANCE:

$$\text{VAR}[X] = E[X^2] - \Big(\underbrace{E[X]}_{=0}\Big)^2 = E[X^2] .$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 f_X(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} dx\, x^2 e^x + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx\, x^2(1-x)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{1}^{2} dx\, x^2(x-1) .$$

SINCE

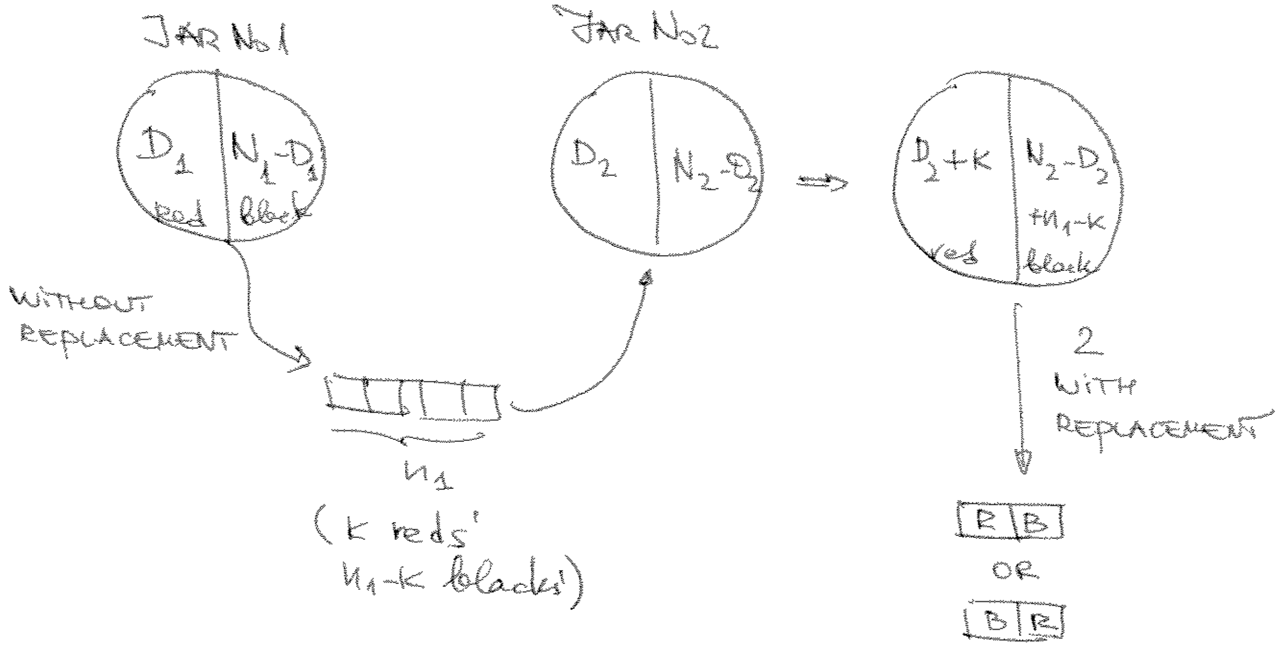
$$\int_{-\infty}^{0} dx\, x^2 e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x \Big|_{-\infty}^{0} = 2$$

$$\int_{0}^{1} dx\, x^2(1-x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\int_{1}^{2} dx\, x^2(x-1) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{17}{12} .$$

WE DERIVE: $\text{VAR}[X] = 1\frac{3}{4}$.

Problem #4



$$P(RB/k) = \frac{D_2 + k}{N_2 + n_1} \cdot \frac{N_2 - D_2 + n_1 - k}{N_2 + n_1}$$

$$P(BR/k) = P(RB/k).$$

Hence, the probability sought is the total probability:

$$P_0 = 2 \sum_{k=0}^{n_1} \frac{(D_2 + k)(N_2 - D_2 + n_1 - k)}{(N_2 + n_1)^2} P(X = k)$$

Here, the random variable $X = \{\#$ of red balls in the first draw$\}$:

$$X \sim Hyp(n_1, D_1, N_1).$$

Then,

$$P_0 = \frac{2}{(N_2 + n_1)^2} \Big\{ (N_2 - D_2 + n_1) D_2 \sum_{k=0}^{n_1} P(X = k)$$

$$+ (N_2 - 2D_2 + n_1) \sum_{k=0}^{n_1} k P(X = k) - \sum_{k=0}^{n_1} k^2 P(X = k) \Big\}$$

Here, $\sum_{k=0}^{n_1} P(X = k) = 1$ (normalisation)

$$\sum_{k=0}^{n_1} k P(X=k) = E[X]$$

$$\sum_{k=0}^{n_1} k^2 P(X=k) = E[X^2] \equiv Var[X] + \left(E[X]\right)^2$$

AS THE RESULT,

$$P_0 = \frac{2}{(N_2+n_1)^2}\Big[(N_2-\mathcal{D}_2+n_1)\mathcal{D}_2 +$$

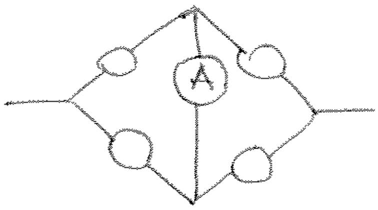
$$+ (N_2 - 2\mathcal{D}_2 + n_1)E[X] - Var[X] - \left(E[X]\right)^2\Big].$$

HERE,

$$E[X] = n_1 \frac{\mathcal{D}_1}{N_1} \quad \text{AND}$$

$$Var[X] = n_1 \frac{\mathcal{D}_1}{N_1}\left(1 - \frac{\mathcal{D}_1}{N_1}\right)\left(1 - \frac{n_1 - 1}{N_1 - 1}\right).$$

PROBLEM #5



DEFINE TWO EVENTS:

$E = \{$ THE CIRCUIT FUNCTIONS $\}$

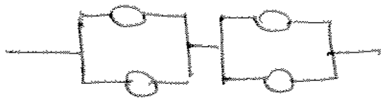
$A = \{$ A FUNCTIONS $\}$

THE PROBABILITY SOUGHT IS $P(A/E)$.

ONE HAS:

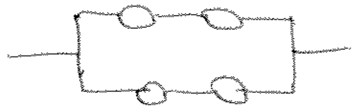
$$P(A/E) = \frac{P(E/A)\cdot P(A)}{P(E)}.$$

E/A:



$$P(E/A) = (2p-p^2)^2.$$

$E/\bar{A}$:



$$P(E/\bar{A}) = 2p^2 - p^4.$$

AS THE RESULT,

$$P(E) = P(E/A)\,P(A) + P(E/\bar{A})\,P(\bar{A}) =$$

$$= (2p-p^2)^2\cdot p + (2p^2-p^4)(1-p).$$

AND

$$\boxed{P(A/E) = \frac{(2p-p^2)^2\cdot p}{(2p-p^2)^2 p + (2p^2-p^4)(1-p)}}$$

PROBLEM #6

$$V_X \sim N(0,\sigma^2)$$
$$V_Y \sim N(0,\sigma^2)$$

INDEPENDENT RANDOM VARIABLES.

A KINETIC ENERGY $K = \frac{m}{2}(V_X^2 + V_Y^2)$

TO FIND ITS PROBABILITY DENSITY FUNCTION, WE START WITH

$$F_K(t) = P(K \le t) = P\left(\frac{m}{2}(V_X^2 + V_Y^2) \le t\right).$$

SINCE THE VARIABLE

$$Z = \frac{V_X^2 + V_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2), \text{ WE OBTAIN:}$$

$$F_K(t) = P\left(\frac{m}{2}\sigma^2 Z \le t\right) = P\left(Z \le \frac{2t}{m\sigma^2}\right) =$$

$$= F_{\chi^2(2)}\left(\frac{2t}{m\sigma^2}\right).$$

IT REMAINS TO CALCULATE A DERIVATIVE:

$$f_K(t) = \frac{d}{dt} F_K(t) = \frac{d}{dt} F_{\chi^2(2)}\left(\frac{2t}{m\sigma^2}\right) =$$

$$= f_{\chi^2(2)}\left(\frac{2t}{m\sigma^2}\right) \cdot \frac{2}{m\sigma^2}.$$

HENCE, WE CONCLUDE THAT

$$f_K(t) = \begin{cases} \frac{1}{m\sigma^2} e^{-t/m\sigma^2}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

B. AGAIN, WE START WITH

$$F_V(t) = P\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2} \le t\right) = P\left(v_x^2+v_y^2 \le t^2\right)$$

$$= P\left(Z = \frac{v_x^2+v_y^2}{\sigma^2} \le \frac{t^2}{\sigma^2}\right) = F_{\chi^2(2)}\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right)$$

THEN,

$$f_V(t) = \frac{d}{dt}F_V(t) = f_{\chi^2(2)}\left(\frac{t^2}{\sigma^2}\right)\cdot\frac{2t}{\sigma^2}$$

HENCE,

$$f_V(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/2\sigma^2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$