מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 10.08.06
סמסטר ב' מועד ב'

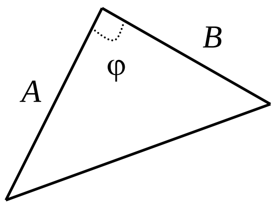
<u>מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019</u>
המרצה: ד"ר יוג'ין קנציפר

❖ **הוראות המבחן**

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. <u>נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.</u>
4. <u>חומר עזר מוגבל</u> – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://sciences.hait.ac.il/~ekanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ **<u>שאלה מס' 1</u>**



שטח המשולש שבנוי על צלעות באורכם A ו-B נתון על ידי הנוסחא $S=\frac{1}{2}AB\sin\varphi$ (ראה/י ציור). כאן, $0<\varphi<\pi$ היא זווית בין הצלעות אלה. בהנחה ש-A ו-B הם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה $A\sim U(0,1)$ ו-$B\sim U(0,1)$ בהתאמה,

א. מצא/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_S(t)=P(S\le t)$ של שטח המשולש עבור כל $-\infty<t<+\infty$.

ב. מצא/י את פונקצית צפיפות ההסתברות $f_S(t)$ של שטח המשולש עבור כל $-\infty<t<+\infty$.

ג. מהי ההסתברות ששטח המשולש לא יעלה על $\frac{1}{4}$?

❖ **<u>שאלה מס' 2</u>**

מתוך כד בו D כדורים אדומים ו-$(N-D)$ כדורים שחורים הוצאו באקראי וללא החזרה n כדורים ($1\le n\le N$). לאחר ששוכפלו הכדורים שנלקחו, הוחזרו $2n$ כדורים חזרה לכד. במצב החדש הוצא כדור אחד מהכד. מהי ההסתברות שצבעו אדום?

❖ **<u>שאלה מס' 3</u>**

בעזרת הנוסחא המולטינומית, חשב/י את $(a+b-c)^3$. תן/תני הסבר מפורט לכל איבר בתשובתך.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026601, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
Tel. 972-3-502-6601, Fax. 972-3-502-6619
www.hit.ac.il
ביה"ס למדעים
School of Sciences

❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

פונקצית התפלגות מצטברת $F_X(t)$ של משתנה מקרי רציף X נתונה על ידי הנוסחא

$$F_X(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ at^2-bt, & 0\le t<1\\ ct, & 1\le t<2\\ d, & t\ge 2\end{cases}.$$

א. חשב/י את המקדמים c ו— d ואת ה<u>תחום</u> המותר של הפרמטרים a ו— b עבורם $F_X(t)$ אומנם פונקצית התפלגות מצטברת.

ב. בהנחה כי $a=\frac{1}{4}$ ו— $b=-\frac{1}{4}$,

ב-1: שרטט/י את הפונקציה $F_X(t)$.

ב-2: מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\mathrm{var}[X]$ של המשתנה המקרי X.

ב-3: חשב/י את ההסתברות המותנית $P(|X|<2\ /\ X>1)$?

❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**

א. יהיה W משתנה מקרי בדיד המקבל ערכים שלמים בלבד. הוכח/הוכיחי כי ההסתברות למציאת ערך זוגי של משתנה מקרי זה היא

$$P(W=\text{even})=\frac{1+E[(-1)^W]}{2}.$$

ב. יהיה X משתנה מקרי בינומי, $X\sim \mathrm{Bin}(n,p)$. מהי ההסתברות ש— X יקבל ערך זוגי?

ג. יהיה Y משתנה מקרי גיאומטרי, $Y\sim \mathrm{G}(p)$. מהי ההסתברות ש— Y יקבל ערך אי זוגי?

ד. יהיה Z משתנה מקרי פואסוני, $Z\sim \mathrm{P}(\lambda)$. מהי ההסתברות ש— Z יקבל ערך זוגי?

❖ **<u>שאלה מס' 6</u>**

מהי ההסתברות שערכו של הווקטור (X_1,X_2,X_3,X_4) במרחב בעל מימד $D=4$ לא יעלה על R אם נתון כי הקואורדינטות X_1,X_2,X_3,X_4 מפולגות נורמלית עם פרמטרים $\mu=0$ ו— σ^2 ?

בהצלחה!

SOLUTIONS TO THE FINAL EXAM
OF AUG 10, 2006

PROBABILITY AND STATISTICS FOR
APPLIED MATHEMATICIANS.

PROBLEM No 1

A. TO CALCULATE $F_S(t) = P(S \leq t) =$

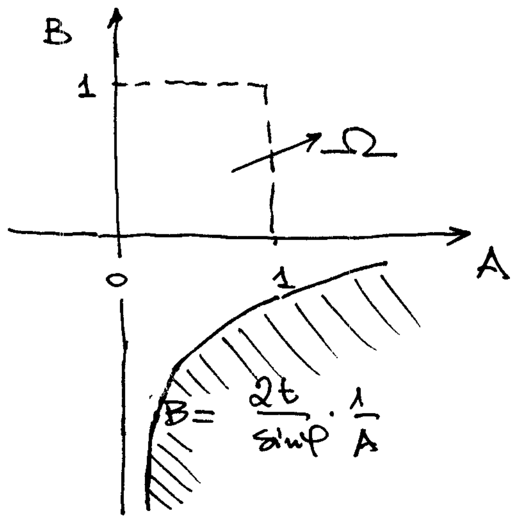
$= P\left(\frac{1}{2} AB \sin\varphi \leq t\right)$, WE MAKE USE OF THE CLASSICAL APPROACH TO PROBABILITY. WHICH IS JUSTIFIED BECAUSE THE RANDOM VARIABLES A AND B ARE UNIFORMLY DISTRIBUTED:

$A \sim U(0,1)$ AND $B \sim U(0,1)$.

$$F_S(t) = P\left(B \leq \frac{2t}{\sin\varphi} \cdot \frac{1}{A}\right).$$

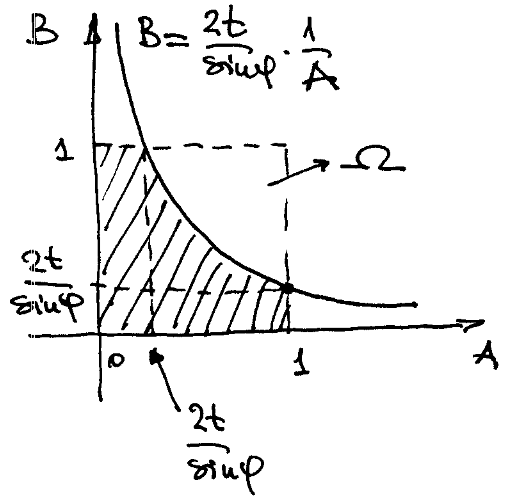
THREE DIFFERENT SITUATIONS HAVE TO BE CONSIDERED:

CASE 1: $t < 0$.



$$F_S(t) \equiv 0.$$

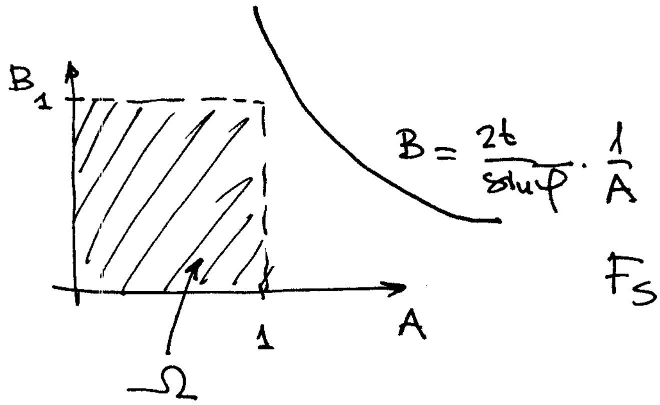
CASE 2: $0 \leq t < \frac{\sin\varphi}{2}$



$$F_S(t) = 1 \cdot \frac{2t}{\sin\varphi} + \frac{2t}{\sin\varphi} \int_{\frac{2t}{\sin\varphi}}^{1} \frac{dA}{A} =$$

$$= \frac{2t}{\sin\varphi}\left[1 - \ln\left(\frac{2t}{\sin\varphi}\right)\right].$$

CASE 3 : $t \geq \frac{\sin\varphi}{2}$



$$F_S(t) = 1.$$

TO SUMMARISE:

$$F_S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2t}{\sin\varphi}\left[1 - \ln\left(\frac{2t}{\sin\varphi}\right)\right], & 0 \leq t < \frac{\sin\varphi}{2} \\ 1, & t \geq \frac{\sin\varphi}{2} \end{cases}$$

B. TO DETERMINE THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION WE USE THE RELATION:

$$f_S(t) = \frac{d}{dt} F_S(t).$$

SIMPLE DIFFERENTIATION YIELDS:

$$f_S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{2}{\sin\varphi} \ln\left(\frac{\sin\varphi}{2t}\right), & 0 \leq t < \frac{\sin\varphi}{2} \\ 0, & t \geq \frac{\sin\varphi}{2}. \end{cases}$$

C. THE PROBABILITY SOUGHT IS

$$P\left(S \leq \tfrac{1}{4}\right) = F_S\left(t = \tfrac{1}{4}\right).$$

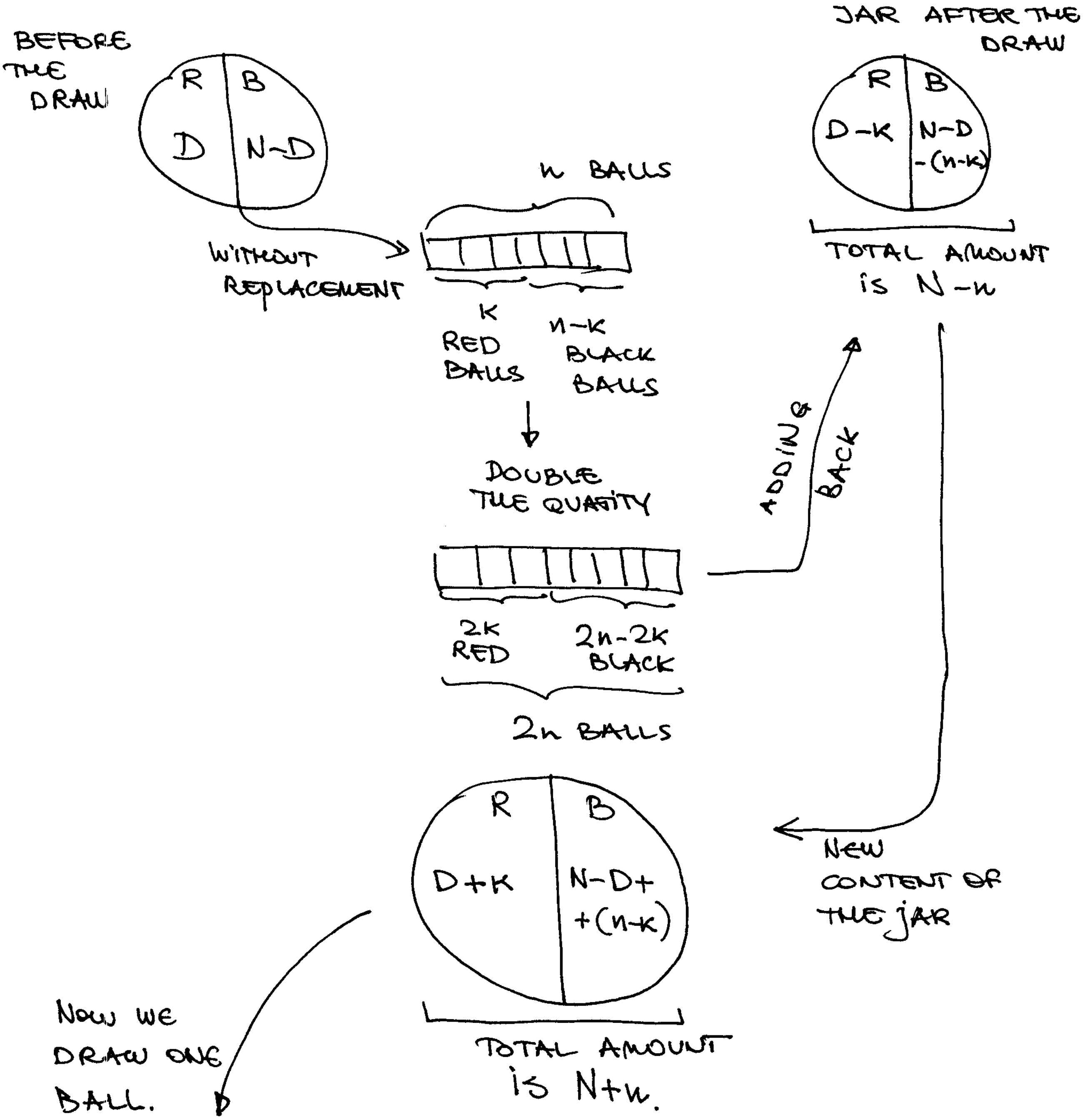
SINCE $\frac{\sin\varphi}{2} = \frac{1}{4}$ FOR $\varphi = \frac{\pi}{6}$, THE ANSWER WILL DEPEND ON φ:

$$P\left(S \leq \tfrac{1}{4}\right) = \begin{cases} \left.\frac{2t}{\sin\varphi}\left[1 - \ln\left(\frac{2t}{\sin\varphi}\right)\right]\right|_{t=\frac{1}{4}} & \text{if } \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \\ 1, & \text{if } \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right). \end{cases}$$

HENCE, THE ANSWER READS:

$$P\left(S \le \frac{1}{4}\right) = \begin{cases} \dfrac{1+\ln(2\sin\varphi)}{2\sin\varphi}, & \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \\ 1, & \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right). \end{cases}$$

PROBLEM No2



THE PROBABILITY OF HAVING IT RED EQUALS:

$$P(R/k) = \frac{D+K}{N+n}$$

This is a <u>CONDITIONAL</u> PROBABILITY AS IT RESTS ON THE ASSUMPTION THAT THERE WERE K RED BALLS OUT OF n BALLS DRAWN WITHOUT REPLACEMENT AT FIRST.

FOLLOWING THE THEOREM OF TOTAL PROBABILITY, WE OBTAIN :

$$P(R) = \sum_{k=0}^{n} P(R/k)\, P(X=k) \qquad (*)$$

WHERE $P(X=k)$ IS THE PROBABILITY TO HAVE EXACTLY K RED BALLS AT THE FIRST DRAW. AS SOON AS

$X \sim Hyp(n, D, N)$, WE MAY PERFORM THE SUMMATION IN (*) FOR FREE:

$$P(R) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D+k}{N+n} P(X=k) = \frac{D}{N+n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(X=k)}_{=1 \text{ DUE TO NORMALISATION PROPERTY.}} +$$

$$+ \frac{1}{N+n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)}_{E[X] = n\frac{D}{N}}.$$

COLLECTING EVERYTHING TOGETHER, WE DERIVE:

$$P(R) = \frac{D}{N+n} + \frac{1}{N+n} \cdot n \frac{D}{N} = \frac{D}{N+n}\left[1 + \frac{n}{N}\right] =$$

$$= \frac{D}{N+n} \cdot \frac{n+N}{N} = \frac{D}{N}.$$

HENCE,

$$P(R) \equiv \frac{D}{N}.$$

PROBLEM No3. TRIVIAL. THE ANSWER IS:

$$(a+b-c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3.$$

PROBLEM No 4

A. THE CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION IS GIVEN IN THE FORM:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ at^2 - bt, & 0 \le t < 1 \\ ct, & 1 \le t < 2 \\ d, & t \geq 2. \end{cases}$$

TRIVIALLY, $d=1$. CONTINUITY ARGUMENTS ALSO YIELD:

$$2c = d = 1 \Rightarrow c = \tfrac{1}{2}$$
$$a - b = c = \tfrac{1}{2}.$$

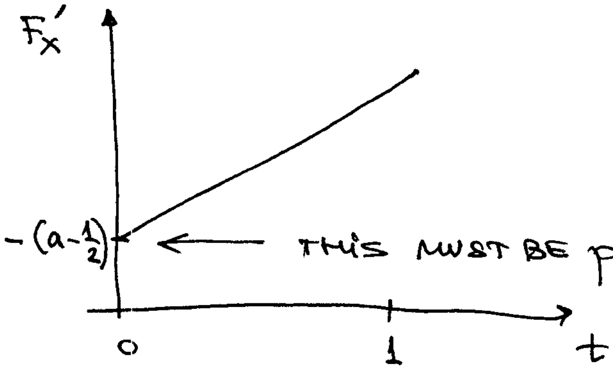
HENCE, $\quad d=1, \quad c=\tfrac{1}{2}, a-b=\tfrac{1}{2}.$

APART FROM CONTINUITY, WE HAVE TO SECURE THAT $F_X(t)$ IS A NON-DECREASING FUNCTION. THE ONLY PROBLEMATIC REGION OF t's, IN THIS RESPECT, IS $0 \le t < 1$, WHERE $F_X(t) = at^2 - bt. = at^2 - (a-\tfrac{1}{2})t.$

FOR IT TO BE NON-DECREASING, ITS FIRST DERIVATIVE MUST BE NON-NEGATIVE FOR ALL $t \in (0,1)$:

$$f_X(t) = \frac{dF_X}{dt} = 2at - (a - \tfrac{1}{2}) \geq 0.$$

CASE 1: $\quad a > 0.$

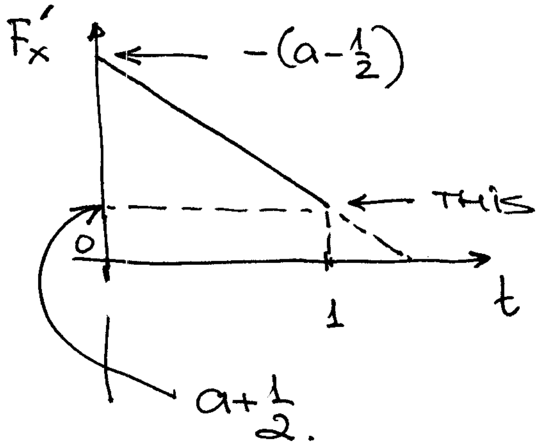


$\longleftarrow$ THIS MUST BE POSITIVE $\Rightarrow a - \tfrac{1}{2} \le 0 \rightarrow a \le \tfrac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$0 \le a \le \tfrac{1}{2}.$$

CASE 2: $a<0$



$\leftarrow$ THIS MUST BE POSITIVE $\Rightarrow$ $a+\frac{1}{2}\geq 0$

$\Downarrow$

$a\geq -\frac{1}{2}$

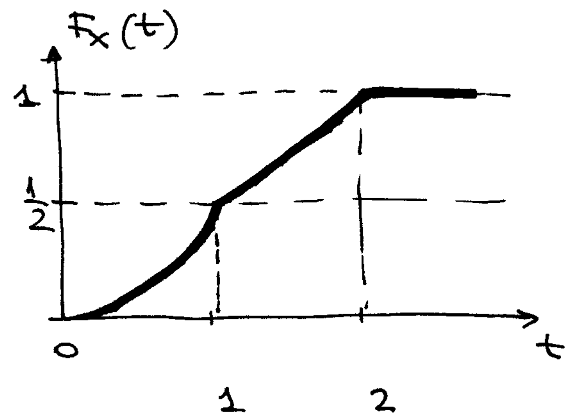
$-\frac{1}{2}\leq a\leq 0.$

COMBINING THE TWO CASES TOGETHER, WE OBTAIN AN ALLOWED REGION OF a:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{1}{2} \\ b=a-\frac{1}{2} \end{cases}$$

B. FOR $a=\frac{1}{4}$ and $b=-\frac{1}{4}$, WE GET:

B1
$$F_X(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{t^2+t}{4}, & 0\leq t<1 \\ \frac{t}{2}, & 1\leq t<2 \\ 1, & t\geq 2 \end{cases}$$



B2.
$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}dx.\,x\,f_X(x) \quad \text{, WHERE}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{4}, & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2}, & 1\leq x<2 \\ 0, & x\geq 2 \end{cases}$$

$$E[X]=\int_0^1 dx.\,x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+\int_1^2 dx.\,x.\,\frac{1}{2}\equiv\frac{25}{24}$$

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \left(E[X]\right)^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot x^2 f_X(x) =$$

$$= \int_0^1 dx \cdot x^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + \int_1^2 dx \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2} \equiv \frac{11}{8}.$$

HENCE,

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{11}{8} - \left(\frac{25}{24}\right)^2 \equiv \frac{167}{576} \simeq 0.29.$$

B3.

$$P(|X|<2 / X<1) = \frac{P(|X|<2 \cap X<1)}{P(X<1)} =$$

$$= \frac{P(X<1)}{P(X<1)} = 1.$$

PROBLEM No 5

A. TO PROVE THE FORMULA, LET US START WITH TWO EQUATIONS:

1) $$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(W=k) = P(W=0) + [P(W=1) + P(W=-1)] + [P(W=2) + P(W=-2)] + \dots$$ (NORMALISATION).

2) $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k P(W=k) = P(W=0) - [P(W=1) + P(W=-1)] + [P(W=2) + P(W=-2)] - [P(W=3) + P(W=-3)].$$

SUMMING UP THE TWO, WE DERIVE:

$$1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k P(W=k) = 2[P(W=0) + P(W=2) + P(W=-2) + P(W=4) + P(W=-4) + \dots] =$$

$$= 2P(W=\text{even}).$$

SINCE, BY DEFINITION,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k P(W=k) = E[(-1)^W],$$

WE EVENTUALLY DERIVE:

$$1 + E\left[(-1)^W\right] = 2P(W = \text{even}),$$

OR,

$$P[W = \text{even}] = \frac{1}{2}\left[1 + E\left[(-1)^W\right]\right].$$

<u>B</u>. $X \sim Bin(n, p). \Rightarrow P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

WHERE $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$P(X = \text{even}) = \frac{1}{2}\left[1 + E\left[(-1)^X\right]\right].$$

SINCE

$$E\left[(-1)^X\right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-p)^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n.$$

HERE, WE HAVE USED THE NEWTON BINOMIAL FORMULA:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

AS A RESULT,

$$P(X = \text{even}) = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right].$$

<u>C</u>. $Y \sim G(p) \Rightarrow P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \infty$

AGAIN, WE CALCULATE

$$E\left[(-1)^Y\right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k P(Y = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1-p)^{k-1}$$

$$= -p \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (p-1)^{k-1}}_{\text{INFINITE GEOMETRIC SERIES}} = -p \cdot \frac{1}{1-(p-1)} = -\frac{p}{2-p}.$$

So,
$$P(Y = \text{even}) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{p}{2-p}\right]$$

WHILST

$$P(Y = \text{odd}) = 1 - P(Y = \text{even}) = \ldots$$

$$\dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{p}{2(2-p)} = \frac{1}{2} + \frac{p}{2(2-p)} = \frac{1}{2-p}.$$

D. $Z \sim P(\lambda) \Rightarrow P(Z=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \infty,$

$$E[(-1)^Z] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P(Z=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \lambda^k \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!}}_{\text{TAYLOR SERIES FOR } e^{-\lambda}} = e^{-2\lambda}.$$

HENCE,

$$P(Z = \text{even}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

PROBLEM No 6 THE LENGTH OF THE VECTOR EQUALS

$$S = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2},$$

SO WE HAVE TO CALCULATE $P(S \le R) = P(X_1^2 + \dots + X_4^2 \le R^2)$

SINCE $X_j \sim N(0, \sigma^2)$, IT IS USEFUL (SEE BELOW) TO INTRODUCE

$$Y_j = \frac{X_j}{\sigma}, \text{ SO THAT } Y_j \sim N(0,1).$$

HENCE, THE PROBABILITY SOUGHT IS

$$P(S \le R) = P\left(Y_1^2 + \dots + Y_4^2 \le \frac{R^2}{\sigma^2}\right).$$

SINCE $Y_j \sim N(0,1)$ AND ARE INDEPENDENT RANDOM VARIABLES, WE KNOW (LECTURE 11, HOMEWORK H 11.3) THAT

$$Y_1^2 + \dots + Y_4^2 \sim \chi^2(4).$$

WITH

$$f_{\chi^2(4)}(y) = \frac{1}{4}\, y\, e^{-y/2}, \quad y \geq 0.$$

AS A RESULT, THE PROBABILITY EQUALS:

$$P(s \leq R) = \frac{1}{4} \int_0^{R^2/\sigma^2} y e^{-y/2}\, dy$$

SIMPLE CALCULATION YIELDS:

$$P(s \leq R) = 1 - \left(1 + \frac{R^2}{2\sigma^2}\right) e^{-R^2/2\sigma^2}.$$