מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology

תאריך: 06.07.06
סמסטר ב' מועד א'

<u>מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019</u>
המרצה: ד"ר יוג'ין קנציפר

❖ **הוראות המבחן**

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 שאלות מתוך 6 שאלות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. <u>נא לרשום בראש המחברת אילו שאלות יש לבדוק.</u>
4. <u>חומר עזר מוגבל</u> – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://sciences.hait.ac.il/~ekanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ **<u>שאלה מס' 1</u>**

נתון כי השורשים X_1 ו— X_2 של משוואה ריבועית $x^2 - Ax + B = 0$ הם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה $X_1 \sim U(0,1)$ ו— $X_2 \sim U(0,1)$ בהתאמה.

א. מצא/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_A(t) = P(A \le t)$ של המקדם A עבור כל $-\infty < t < +\infty$.

ב. מצא/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_B(t) = P(B \le t)$ של המקדם B עבור כל $-\infty < t < +\infty$.

ג. מהן פונקציות הצפיפות $f_A(t)$ ו— $f_B(t)$ של המקדמים המקריים A ו— B ? שרטט/י אותן!

❖ **<u>שאלה מס' 2</u>**

מתוך כד בו D כדורים אדומים ו—$(N-D)$ כדורים שחורים הוצאו באקראי וללא החזרה n כדורים ($1 \le n \le N$). לאחר שהוחלפו צבעי הכדורים שנלקחו (כל כדור אדום נצבע בצבע שחור וכל כדור שחור נצבע בצבע אדום), הוחזרו n הכדורים (בצבעים חדשים) חזרה לכד. במצב החדש נלקחו, <u>עם החזרה</u>, שני כדורים מהכד. מהי ההסתברות ששניהם יהיו בצבע אדום?

❖ **<u>שאלה מס' 3</u>**

נתונים שני משתנים מקריים בינומיים בלתי תלויים, $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ ו— $Y \sim \mathrm{Bin}(m,p)$. נגדיר משתנה מקרי חדש $Z = X + Y$.

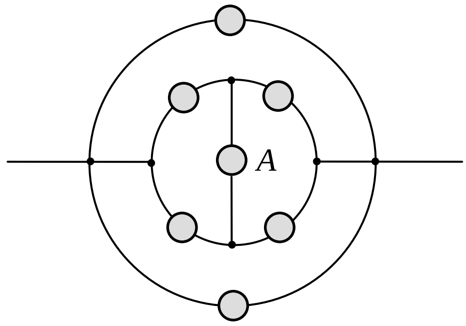
א. מהם הערכים האפשריים של המשתנה המקרי Z ?

ב. מצא/י את פונקצית ההסתברות $P_Z(z)$ של המשתנה המקרי Z.

גולומב 52, ת.ד 305, חולון 58102
טלפון 03-5026601, פקס' 03-5026619
52 Golomb St., Holon 58102 Israel
www.hit.ac.il Tel. 972-3-502-6601, Fax. 972-3-502-6619
ביה"ס למדעים
School of Sciences

❖ **<u>שאלה מס' 4</u>**

מעגל חשמלי מורכב מתשע יחידות הפועלות ללא תלות בהסתברות p .



א. מהי ההסתברות שהמעגל כולו פועל?

ב. אם ידוע שהמעגל כולו פועל, מהי ההסתברות שהיחידה A פועלת?

<u>הערה</u>: אין צורך לפשט את הביטויים המתקבלים.

❖ **<u>שאלה מס' 5</u>**

n מספרים $\{X_1,...,X_n\}$ נבחרו באקראי ו<u>ללא החזרה</u> מהאוסף $\{1,2,...,N\}$; כאן $2 \le n \le N$. יהיו $X_{\min}$ המספר הקטן ביותר ו-— $X_{\max}$ המספר הגדול ביותר בין n המספרים שנבחר. מצא/י את

א. הערכים האפשריים של המשתנה המקרי הדו ממדי $(X_{\min}, X_{\max})$.

ב. פונקצית ההסתברות המשותפת $P_{X_{\min},X_{\max}}(x_{\min}, x_{\max})$ של $(X_{\min}, X_{\max})$.

ג. פונקציות ההסתברות השוליות $P_{X_{\min}}(x_{\min})$ ו-— $P_{X_{\max}}(x_{\max})$.

<u>הערה</u>: בסעיפים ב' ו-—ג' נוח להיעזר בנוסחא: $\sum_{m=1}^{N-j} C_{m-1}^{n-2} = C_{N-j}^{n-1}$.

❖ **<u>שאלה מס' 6</u>**

רווח סמך לתוחלת μ ברמת סמך $1-\alpha$ המחושב על סמך $n \ge 30$ תצפיות בלבד הוא $\mu_1 < \mu < \mu_2$. איך ישתנה רווח סמך לתוחלת אם נוסיף עוד תצפית אחת שהיא Y? יש לבטא את התשובה דרך הפרמטרים μ_1, μ_2, n, Y ו-— α.

בהצלחה!

פתרונות המבחן

״הסתברות וסטטיסטיקה למתמטיקה שימושית״

המרצה: ד״ר יוג׳ין קנציפר

6 ביולי 2006

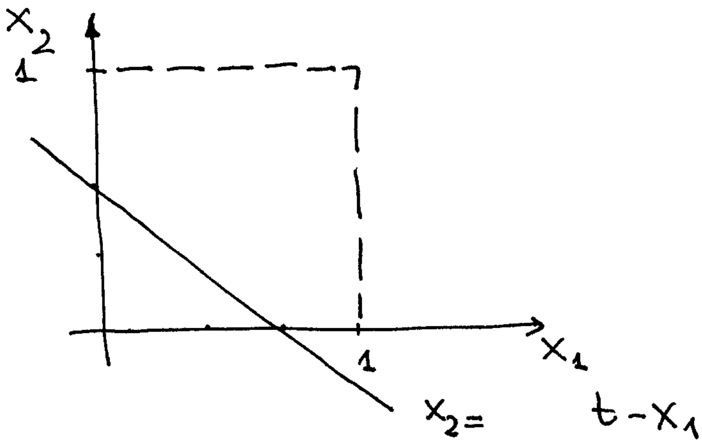
PROBLEM No 1

WE ARE GIVEN $X_1 \sim U(0,1)$ & $X_2 \sim U(0,1)$, THE TWO INDEPENDENT RANDOM VARIABLES.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2} \\ x_2 &= \frac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x_1+x_2 &= A \\ x_1 x_2 &= B \end{aligned}$$

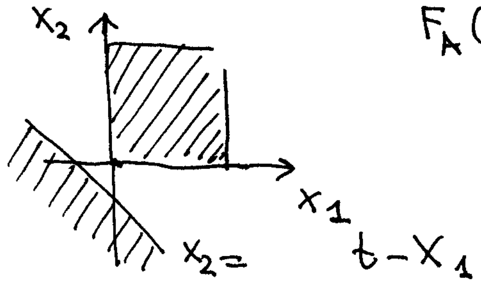
A. $P(A \le t) = F_A(t) = P(X_1+X_2 \le t) = P(X_2 \le t - X_1)$

WE USE THE CLASSICAL APPROACH TO PROBABILITY:



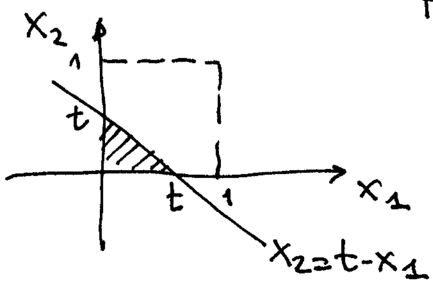
FOUR CASES ARE TO BE CONSIDERED:

CASE 1 $\quad t < 0$



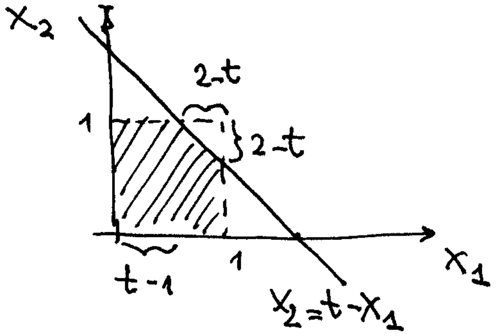
$$F_A(t) = P(X_2 \le t - X_1) \equiv 0$$

CASE 2 $\quad 0 \le t < 1$



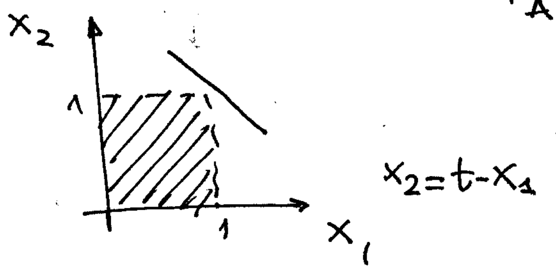
$$F_A(t) = P(X_2 \le t - X_1) = \frac{1}{2}t^2$$

CASE 3 $\quad 1 \le t < 2$



$$F_A(t) = P(X_2 \le t - X_1) = 1 - \frac{1}{2}(t-2)^2.$$

CASE 4 $\quad t > 2$

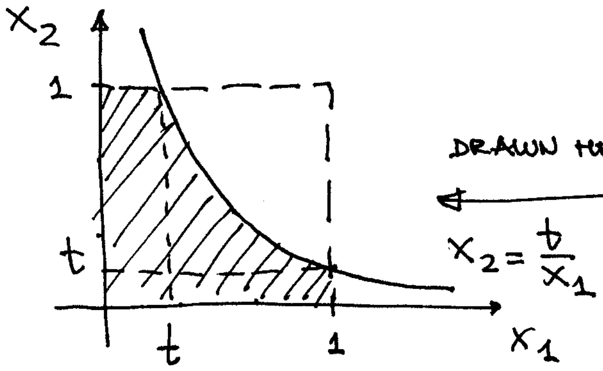


$$F_A(t) = P(X_2 \le t - X_1) \equiv 1$$

ANSWER:

$$F_A(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0 \le t < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(t-2)^2, & 1 \le t < 2 \\ 1, & t \ge 2 \end{cases}$$

B. $\quad P(B \le t) = F_B(t) = P(X_1 X_2 \le t) = P\left(X_2 \le \frac{t}{X_1}\right)$



DRAWN HERE

$x_2 = \frac{t}{x_1}$

CASE 1: $t < 0$: $F_B(t) = 0$

CASE 2: $0 \le t < 1$

$$F_B(t) = 1 \cdot t + t \int_t^1 \frac{dx_1}{x_1}$$

$$= t - t \ln t$$

CASE 3: $\quad t \ge 1$

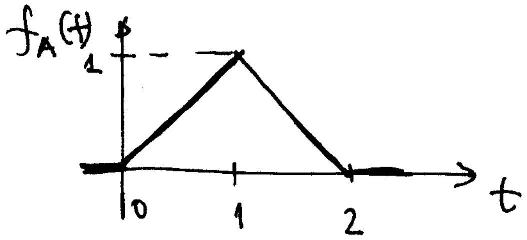
$$F_B(t) \equiv 1.$$

ANSWER:

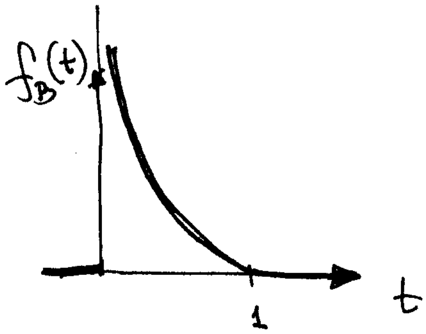
$$F_B(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t - t\ln t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

C. PROBABILITY DENSITY FUNCTIONS ARE:

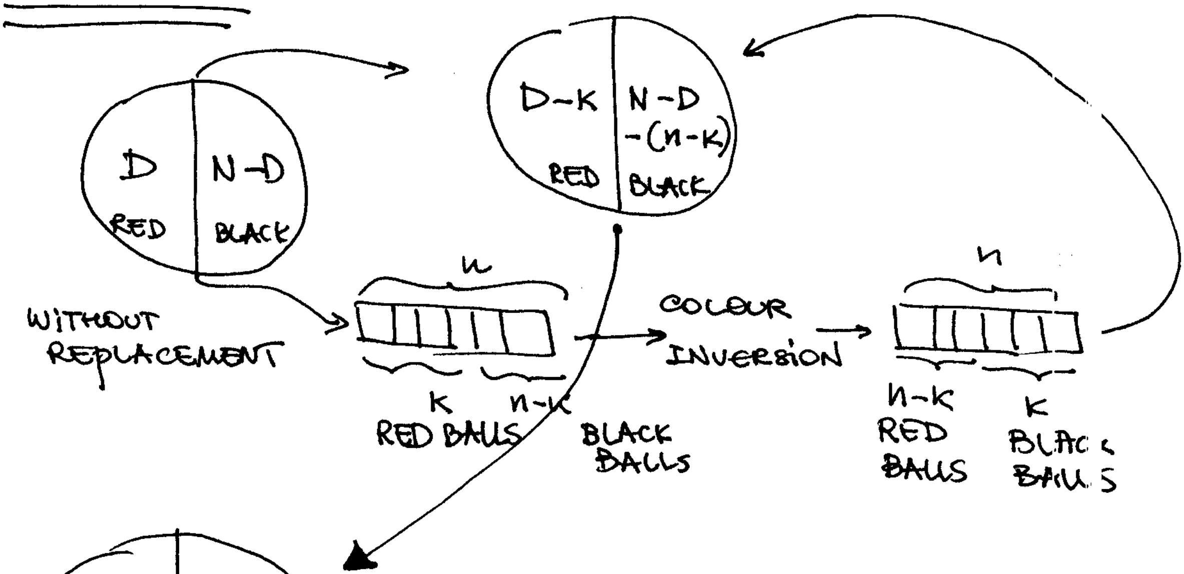
$$f_A(t) = \frac{d}{dt} F_A(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

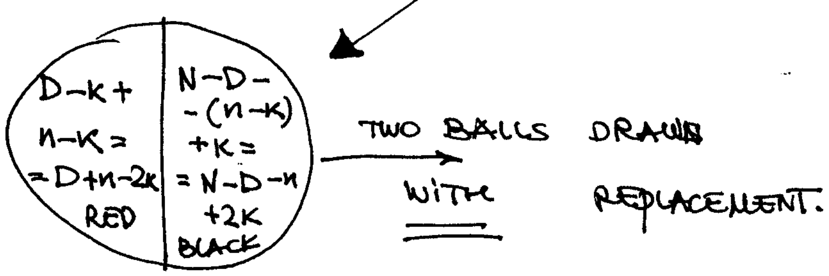


$$f_B(t) = \frac{d}{dt} F_B(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \ln \frac{1}{t}, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$$



PROBLEM No 2





CONDITIONED ON k RED BALLS DRAWN AT THE FIRST STEP:

$$P(R/k) = \left(\frac{D+n-2k}{N}\right)^2.$$

IN TOTAL: $D+n-2k+N-D-n+2k = N$. OK!

TO CALCULATE THE TOTAL PROBABILITY, ONE HAS TO APPEAL TO THE THEOREM OF TOTAL PROBABILITY:

$$P(R) = \sum_{k=0}^{n} P(R/k) \cdot P(X=k). \qquad (1.)$$

HERE,

$$P(X=k) = \frac{C_D^k \, C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \qquad (2)$$

EQUATION (1) YIELDS:

$$P(R) = \left(\frac{D+n}{N}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} P(X=k) - \frac{4(D+n)}{N^2} \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k)$$

$$+ \frac{4}{N^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k)$$

SINCE $X \sim Hyp(D, N; n)$, ONE HAS:

1) $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$

2) $\sum_{k=0}^{n} k \, P(X=k) = E[X] = n\frac{D}{N}$

3) $\sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = E[X^2] = Var[X] + (E[X])^2 =$

$$= n\frac{D}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right) + \left(n\frac{D}{N}\right)^2.$$

COMBINING EVERYTHING TOGETHER, WE DERIVE:

$$\boxed{P(R) = \left(\frac{D+n}{N}\right)^2 - \frac{4(D+n)}{N^2} \cdot n\frac{D}{N} + \frac{4}{N^2} \cdot \frac{nD}{N} \cdot \left[\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right) + n\frac{D}{N}\right].}$$

Problem No3

A. Allowed values of X are: $0, 1, \dots, n$

" " " Y ": $0, 1, \dots, m$

Hence, the allowed values of $Z = X+Y$ are

$0, 1, 2, \dots, n+m$.

B. To figure out what the distribution of Z is, we use הצגה כסכום:

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad X_j \sim Ber(p)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j, \quad Y_j \sim Ber(p)$$

בלתי תלויים

Then,

$$Z = X+Y = \sum_{j=1}^{n} X_j + \sum_{j=1}^{m} Y_j =$$

= sum of $\underline{\underline{n+m}}$ independent Bernoulli variables.

Hence, we conclude that

$$Z \sim Bin(n+m, p).$$

So that

$$P(Z=k) = C_{n+m}^{k}\, p^k (1-p)^{n+m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m.$$

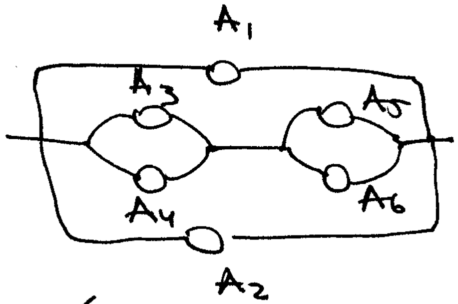
PROBLEM #4

A. THE THEOREM OF TOTAL PROBABILITY TELLS US THAT:

$$P(E) = P(E/A)\,\underbrace{P(A)}_{p} + P(E/\bar{A})\,\underbrace{P(\bar{A})}_{1-p}.$$

"CIRCUIT FUNCTIONS"

EFFECTIVE CIRCUIT FOR E/A :



$$E/A = \underbrace{(A_1 \cup A_2)}_{B_1} \cup \left(\underbrace{(A_3 \cup A_4)}_{B_2} \cap \underbrace{(A_5 \cup A_6)}_{B_3} \right)$$

$$P(E/A) =$$

$$= P(B_1 \cup (B_2 \cap B_3)) =$$

$$= P(B_1) + P(B_2 \cap B_3) - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) + P(B_2)P(B_3) - P(B_1)P(B_2)P(B_3)$$

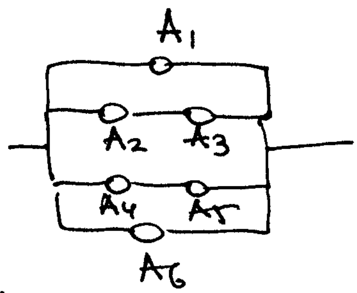
$$P(B_1) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 2p - p^2$$

$$P(B_2) = P(B_3) = 2p - p^2.$$

HENCE,

$$\boxed{P(E/A) = (2p-p^2) + (2p-p^2)^2 - (2p-p^2)^3} = 2p + 3p^2 - 12p^3 + 13p^4 - 6p^5 + p^6$$

EFFECTIVE CIRCUIT FOR $E/\bar{A}$:



$$E/\bar{A} = \underbrace{(A_1 \cup A_6)}_{B_1'} \cup \underbrace{(A_2 \cap A_3)}_{B_2'} \cup \underbrace{(A_4 \cap A_5)}_{B_3'}$$

$$P(E/\bar{A}) = P(B_1' \cup (B_2' \cup B_3')) =$$
$$= P(B_1') + P(B_2' \cup B_3') - P(B_1' \cap (B_2' \cup B_3'))$$
$$= P(B_1') + P(B_2') + P(B_3') - P(B_2')P(B_3') -$$
$$- P(B_1') \cdot P(B_2' \cup B_3') \quad \text{etc.}$$

$$P(B_1') = 2p - p^2;$$
$$P(B_2') = p^2$$
$$P(B_3') = p^2.$$

$$= 2p + p^2 - 4p^3 + p^4 + 2p^5 - p^6$$

$$\boxed{P(E/\bar{A}) = (2p-p^2) + 2p^2 - p^4 - (2p-p^2)(2p^2 - p^4).}$$

COMBINING EVERYTHING TOGETHER, WE COME UP WITH:

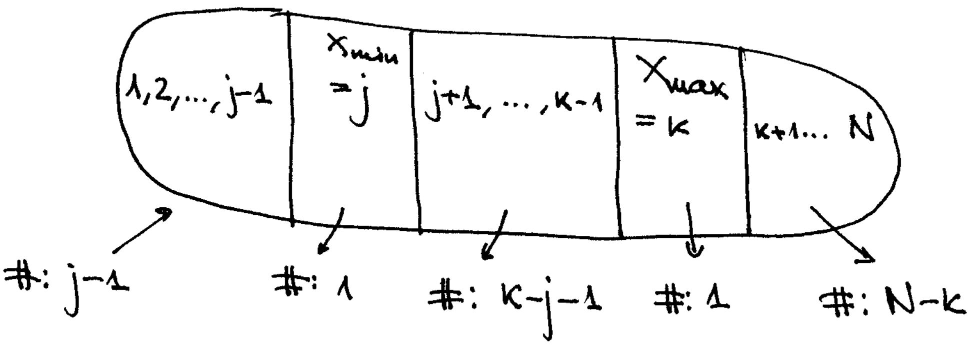
$$P(E) = p \cdot (2p-p^2)\left[1 + (2p-p^2) - (2p-p^2)^2\right] +$$
$$+ (1-p)\left[(2p-p^2)(1-2p^2+p^4) + 2p^2 - p^4\right].$$

B.

$$P(A/E) = \frac{P(E/A)P(A)}{P(E)}.$$

JUST SUBSTITUTE!

PROBLEM #5



CHECKING THE TOTAL AMOUNT: $\underline{j}-\underline{1}+\underline{1}+\underline{k}-\underline{j}-\underline{1}+\underline{1}+N-\underline{k}=N.$

A. $1 \leq X_{min} < X_{max} \leq N \rightarrow$ ALLOWED VALUES.

B. JOINT PROBABILITY FUNCTION:

$$P(X_{min}=j, X_{max}=k) = \frac{C_{j-1}^{0} \cdot C_{1}^{1} C_{k-j-1}^{n-2} C_{1}^{1} C_{N-k}^{0}}{C_{N}^{n}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(X_{min}=j, X_{max}=k) = \frac{C_{k-j-1}^{n-2}}{C_{N}^{n}}} \qquad \underline{1 \leq j < k \leq N.}$$

C. MARGINAL PROBABILITY FUNCTIONS:

$$P(X_{min}=j) = \sum_{k=j+1}^{N} \frac{C_{k-j-1}^{n-2}}{C_{N}^{n}} = \langle k-j \equiv m \rangle =$$

$$= \frac{1}{C_{N}^{n}} \underbrace{\sum_{m=1}^{N-j} C_{m-1}^{n-2}}_{\text{הערה}} = \frac{C_{N-j}^{n-1}}{C_{N}^{n}.} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(X_{min}=j) = \frac{C_{N-j}^{n-1}}{C_{N}^{n}.}} \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$P(X_{max}=k)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1} C_{k-j-1}^{n-2}}{C_N^n} = \langle k-j=m\rangle =$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=1}^{k-1} C_{m-1}^{n-2}}{C_N^n} = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}\,; \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{P(X_{max}=k)=\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}\,; \quad k=n,\dots,N.}$$

PROBLEM No 6

$$\underbrace{\overline{X}_{(n)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}_{(n)}}{\sqrt{n}}}_{\mu_1} < \mu < \underbrace{\overline{X}_{(n)} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}_{(n)}}{\sqrt{n}}}_{\mu_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{X}_{(n)} = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}} ; \quad \boxed{\hat{S}_{(n)} = \frac{(\mu_2-\mu_1)\sqrt{n}}{2 z_{\frac{\alpha}{2}}}}$$

AFTER ADDING ONE MORE OBSERVATION POINT Y, WE HAVE TO CALCULATE

$$\overline{X}_{(n+1)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}_{(n+1)}}{\sqrt{n+1}} < \mu < \overline{X}_{(n+1)} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}_{(n+1)}}{\sqrt{n+1}} .$$

SO, WE HAVE TO DETERMINE: $\overline{X}_{(n+1)}$ AND $\hat{S}_{(n+1)}$.

1) $$\overline{X}_{(n+1)} = \frac{1}{n+1}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j}_{n\overline{X}_{(n)}} + Y\Big) = \frac{n\overline{X}_{(n)} + Y}{n+1} .$$

2) $$\hat{S}^2_{(n+1)} = ?$$

$$\hat{S}^2_{(n)} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{X}_{(n)})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - n\,\overline{X}^2_{(n)}\right].$$

THEN,

$$\hat{S}^2_{(n+1)} = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + Y^2 - (n+1)\,\overline{X}^2_{(n+1)}\right].$$

SINCE

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = (n-1)\hat{S}^2_{(n)} + n\overline{X}^2_{(n)} ,$$ ONE DERIVES:

$$\hat{S}^2_{(n+1)} = \frac{1}{n}\left[(n-1)\hat{S}^2_{(n)} + n\overline{X}^2_{(n)} + Y^2 - \frac{(n\overline{X}_{(n)}+Y)^2}{n+1}\right].$$

THIS CAN FURTHER BE SIMPLIFIED TO:

$$\boxed{\hat{S}^2_{(n+1)} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\hat{S}^2_{(n)} + \frac{\left(\bar{X}_{(n)}-Y\right)^2}{n+1}}$$

EVENTUALLY,

$$\bar{X}_{(n+1)} = \frac{\frac{n}{2}(\mu_1+\mu_2)+Y}{n+1}$$

$$\hat{S}^2_{(n+1)} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{(\mu_2-\mu_1)^2 n}{4 z^2_{\frac{\alpha}{2}}} + \frac{1}{n+1}\left[\frac{\mu_1+\mu_2}{2} - Y\right]^2$$

$$\frac{\frac{n}{2}(\mu_1+\mu_2)+Y}{n+1} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n+1}}\hat{S}_{(n+1)} < \mu < \frac{\frac{n}{2}(\mu_1+\mu_2)+Y}{n+1} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n+1}}\hat{S}_{(n+1)}$$