Holon Academic
Institute of Technology

מכון אקדמי
טכנולוגי חולון (ע"ר)

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS
המחלקה למתמטיקה שימושית

תאריך: 09.05.05
סמסטר ב' תשס"ה

ת.ז.
000 000 000

בוחן אמצע בקורס "הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019

הוראות הבוחן:

1. משך הבוחן: שעתיים.
2. חלק ראשון: עליך לתת תשובות לכל השאלות של החלק הראשון בטופס הבוחן בלבד.
3. חלק שני: עליך לתת פתרונות מלאים במחברת.
4. חומר עזר: דף הנוסחאות המצורף.

חלק ראשון

יש לתת תשובות בטופס זה. ערך כל שאלה 5 נקודות

01. סמן/י ב-$\surd$ את המאורע/ות המתאים/ים להגדרה: "מתרחש <u>לפחות אחד</u> ממאורעות A, B ו-C".

מאורע	מאורע	מאורע	מאורע	אם שום מאורע לא מתאים להגדרה, נא לרשום את המאורע המתאים פה:
$A\cap B\cap C$	$\overline{A\cap B\cap C}$	$A\cup B\cup C$	$\overline{A\cup B\cup C}$	
↓	↓	↓	↓	↓
		$\surd$		

02. נתון כי A ו-B הם מאורעות <u>זרים</u>. סמן/י ב-$\surd$ את המאורע $\overline{(\bar{A}\cup\bar{B})}$

מאורע	מאורע	מאורע	מאורע	מאורע	מאורע
$A\cup B$	A	B	$\varnothing$	Ω	$A\cap B$
↓	↓	↓	↓	↓	↓
			$\surd$		

.03 סמן/י ב-$\surd$ את הטענות הנכונות:

טענה	סמן/י פה:
$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$	$\surd$
$A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B$	$\surd$
$\overline{A}\cap B=A\cup B$	
$\overline{(A\cup B)}\cap\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$	$\surd$
$(A\cap B)\cap(\overline{B}\cap C)=\varnothing$	$\surd$

.04 תן/י את הניסוח של משפט הפרוק:

יהיו X_1 ,... ,X_n – n משתני ברנולי בלתי תלויים בעלי אותו פרמטר $0\le p\le 1$.

אזי המשתנה $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$ מפולג בינומית: $X\sim B(n,p)$.

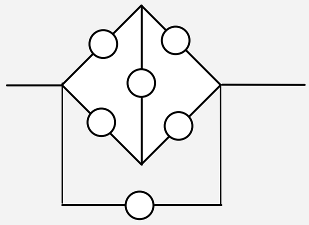
.05 איך מפולגים משתנים מקריים שמוגדרים בטבלה? מצא/י את התוחלות של משתנים אלה.

הגדרות הניסוי והמשתנה	סוג ופרמטרים של ההתפלגות	$E[X]$
ניסוי: בחירה מקרית <u>עם החזרה</u> של שתי ספרות מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **משתנה:** $X=$ {מספר הספרות המתחלקות ב-3 בין שתיים שנבחרו}	$B\left(2,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$
ניסוי: בחירה מקרית של סיפרה אחת מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **משתנה:** $X=$ {סיפרה שנבחרת אקראית}	$U(1,9)$	5
ניסוי: בחירה מקרית <u>וללא החזרה</u> של שלוש ספרות מאוסף {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. **משתנה:** $X=$ {מספר ספרות אי זוגיות בין שלוש שנבחרו}	$H(9,5,3)$	$\frac{5}{3}$
ניסוי: בחירה מקרית <u>עם החזרה</u> של סיפרה מהסדרה {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **משתנה:** $X=$ {מספר הבחירות עד קבלת סיפרה "5" בפעם השנייה}	$NB\left(\frac{1}{9},2\right)$	18

06. מעגל חשמלי מורכב מיחידות A, B, C , D, E ו- F. הסתברות המאורע Q = {מעגל כולו פעול} ניתנת על ידי הנוסחא

$$P(Q) = P\big(((A\cup C)\cap(B\cup D))\cup E\big)\cdot P(F) + P\big((A\cap B)\cup(C\cap D)\cup E\big)\cdot P(\overline{F}).$$

צייר/י את המעגל בתא:



חלק שני

יש לתת פתרון מלא במחברת הבוחן

07. נא להוכיח את הנוסחא:

$$P\big((A\cup B)/C\big) = P\big(A/C\big) + P\big(B/C\big) - P\big((A\cap B)/C\big).$$

(20 נק')

<u>פתרון</u>: כדי להוכיח את הנוסחא, נתבונן ב-$P\big((A\cup B)/C\big)$. על פי נוסחא להסתברות מותנית,

$$P\big((A\cup B)/C\big) = \frac{P\big((A\cup B)\cap C\big)}{P(C)}.$$

על פי חוק דיסטריבוטיבי, $P\big((A\cup B)\cap C\big) = P\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)$.

חוק האיחוד מביא:

$$P\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P\left(\underbrace{(A\cap C)\cap(B\cap C)}_{A\cap B\cap C}\right)$$
$$= P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C).$$

כך ש-

$$P\big((A\cup B)/C\big) = \frac{P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)}{P(C)}.$$

בשלב אחרון, משתמשים בנוסחא להסתברות מותנית:

$$P(A\cap C) = P(A/C)\cdot P(C),$$
$$P(B\cap C) = P(B/C)\cdot P(C),$$
$$P(A\cap B\cap C) = P((A\cap B)\cap C) = P((A\cap B)/C)\cdot P(C).$$

הצבה של זה בנוסחא הקודמת מביאה:

$$P((A\cup B)/C)=\frac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$$
$$=\frac{P(A/C)\cdot P(C)+P(B/C)\cdot P(C)-P((A\cap B)/C)\cdot P(C)}{P(C)}$$
$$=P(A/C)+P(B/C)-P((A\cap B)/C).$$

סוף הוכחה.

08. כמה <u>מספרים</u> שונים בני 6 ספרות ניתן להרכיב מהספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 כך ששלוש הספרות הראשונות משמאל יהיו מסודרות בסדר עולה ושלוש הספרות הבאות יהיו מסודרות בסדר יורד? אסור להשתמש באותה סיפרה יותר מפעם אחת. **(20 נק')**

<u>פתרון</u>: הרכבת המספר הוא ניסוי דו שלבי.

א. בשלב הראשון יש למלא שלושה תאים משמאל בספרות בסדר עולה כך שהספרה 0 לא יכולה להיות ספרה ראשונה. מספר האופציות למלא את התאים האלה בלי הגבלה על הספרה 0 שווה ל- $\frac{P_{10}^3}{3!}$ (פה $3!$ במחנה לוקח בחשבון סדר עולה). מספר האופציות למלא את התאים האלה כאשר הספרה 0 היא כן ספרה ראשונה משמאל שווה ל- $\frac{P_9^2}{2!}$ (פה $2!$ במחנה לוקח בחשבון סדר עולה). אזי, ישנן סך הכול $\left(\frac{P_{10}^3}{3!}-\frac{P_9^2}{2!}\right)=84$ אופציות עבור השלב הראשון.

ב. מספר האופציות עבור השלב השני מחושב באותו סגנון: הוא שווה ל- $\frac{P_7^3}{3!}=35$.

ג. על פי עיקרון הכפל, מספר האופציות הכולל להרכיב מספר בעל תכונות מוגדרות בשאלה שווה לכפל בין מספר האופציות בכל שלב:

$$\left(\frac{P_{10}^3}{3!}-\frac{P_9^2}{2!}\right)\frac{P_7^3}{3!}=84\cdot 35=2940.$$

09. מאוסף המכיל N פריטים ובתוכם D פריטים מיוחדים מוצאים פריטים <u>ללא החזרה</u>. באחת משאלות בית הוכחת כי ההסתברות להגיע לפריט המיוחד הראשון בהוצאה ה- k היא

$$p_k=\frac{C_{N-k}^{D-1}}{C_N^D} \quad \text{עבור} \quad k=1,\dots,N-D+1.$$

נגדיר משתנה מקרי $X_2=\{$מספר הוצאות הפריטים עד הוצאת הפריט המיוחד השני$\}$.

א. מהם הערכים האפשריים של X_2? **(5 נק')**

ב. חשב/י את פונקצית ההסתברות של X_2. במילים אחרות: מהי ההסתברות $P(X_2=k)$ להגיע לפריט המיוחד השני בהוצאה ה- k? **(25 נק')**

<u>פתרון</u>: נפתור שאלה כללית יותר. נגדיר משתנה מקרי $X_m=\{$מספר הוצאות הפריטים עד הוצאת הפריט המיוחד ה- m $\}$ ונחשב את פונקצית ההסתברות שלו.

א. הערכים האפשריים של X_m הם $k=m,\dots,N-D+m$. הערך המינימלי ($k=m$) מתאים למצב כאשר כל m הפריטים הראשונים שהוצאו הם היו פריטים מיוחדים. הערך המקסימלי ($k=N-D+m$) מתאים למצב בו אנחנו מוציאים כל הפריטים הרגילים ($N-D$ במספר) ורק לאחר מכן מוציאים m פריטים מיוחדים.

ב. פונקצית ההסתברות $P(X_m=k)$ היא הסתברות להגיע לפריט המיוחד ה-m בהוצאה ה-k. אפשר להסתכל על המאורע $\{X_m=k\}$ כעל מילוי של k תאים באמצעות פרטי האוסף כך שהתא ה-k יהיה תפוס על ידי הפריט המיוחד ה-m, כאשר $k-1$ התאים הקודמים יהיו ממולאים על ידי $m-1$ פריטים מיוחדים ו-$k-1-(m-1)=k-m$ פריטים רגילים.

נתייחס למילוי של k תאים כמו לניסוי דו-שלבי.

בשלב הראשון, אנחנו ממלאים $k-1$ התאים הראשונים באמצעות $m-1$ פריטים מיוחדים ו-$k-m$ פריטים רגילים. ההסתברות לזה ניתנת על ידי התפלגות היפרגיאומטרית:

$$P_1=\frac{C_D^{m-1}C_{N-D}^{k-m}}{C_N^{k-1}}.$$

בשלב השני, אנחנו ממלאים את התא האחרון – ה-k – באמצעות הפריט המיוחד. ההסתברות לזה הא

$$P_2=\frac{D-(m-1)}{N-(k-1)}.$$

עיקרון הכפל מביא:

$$P(X_m=k)=P_1P_2=\frac{C_D^{m-1}C_{N-D}^{k-m}}{C_N^{k-1}}\frac{D-(m-1)}{N-(k-1)}.$$

אפשר לפשט את התשובה עד ל-

$$P(X_m=k)=\frac{C_{N-k}^{D-m}C_{k-1}^{m-1}}{C_N^D} \quad \text{עבור} \quad k=m,\dots,N-D+m.$$

<u>בשאלת בוחן</u>: $m=2$ כך ש-

$$P(X_2=k)=(k-1)\frac{C_{N-k}^{D-2}}{C_N^D} \quad \text{עבור} \quad k=2,\dots,N-D+2.$$

<u>בשאלת בית</u>: $m=1$ כך ש-

$$P(X_1=k)=\frac{C_{N-k}^{D-1}}{C_N^D} \quad \text{עבור} \quad k=1,\dots,N-D+1.$$