Holon Academic Institute of Technology
מכון אקדמי טכנולוגי חולון (ע"ר)

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS
המחלקה למתמטיקה שימושית

תאריך: 07.08.05
סמסטר ב' מועד ב'

מבחן ב"הסתברות וסטטיסטיקה" – 21019
המרצה: ד"ר יוג'ין קנציפר

❖ הוראות המבחן

1. משך המבחן 3 שעות.
2. עליך לפתור סה"כ 4 בעיות מתוך 6 בעיות. הסבר/י ונמק/י את תשובותיך.
3. נא לרשום בראש המחברת אלו שאלות יש לבדוק.
4. חומר עזר מוגבל – חומר לימוד ודפי נוסחאות סטנדרטיים מודפסים מאתר הקורס בכתובת: http://sciences.hait.ac.il/~ekanzieper. מותר להיעזר במחשבון.
5. **בהצלחה!**

❖ ❖ ❖

❖ שאלה מס' 1

פרבולה המתוארת על ידי הנוסחא $y = x^2 + ax + b$ מכילה שני משתנים מקריים בלתי תלויים ורציפים a ו—b, בעלי התפלגות אחידה: $a \sim U(-1,+1)$ ו—$b \sim U(0,1)$. נגדיר את המשתנה הבדיד $N =${מספר נקודות חיתוך בין הפרבולה לצירים X ו—Y}.

א. מהם הערכים האפשריים של המשתנה N? מצא/י את פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי זה.

ב. חשב/י את התוחלת $E[N]$ ואת השונות $\mathrm{var}[N]$ של המשתנה N.

ג. אם ידוע כי $N \le 2$, מהי ההסתברות שהשטח מתחת לפרבולה בין הנקודות $X = 0$ ו— $X = 1$ עולה על $\frac{1}{3}$?

❖ שאלה מס' 2

כמה מספרים שונים בני שמונה ספרות ניתן להרכיב מהספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 כך ששלוש הספרות הראשונות משמאל תהיינה מסודרות בסדר עולה ושלוש הספרות האחרונות מימין תהיינה מסודרות בסדר יורד? אסור להשתמש באותה סיפרה יותר מפעם אחת!

❖ שאלה מס' 3

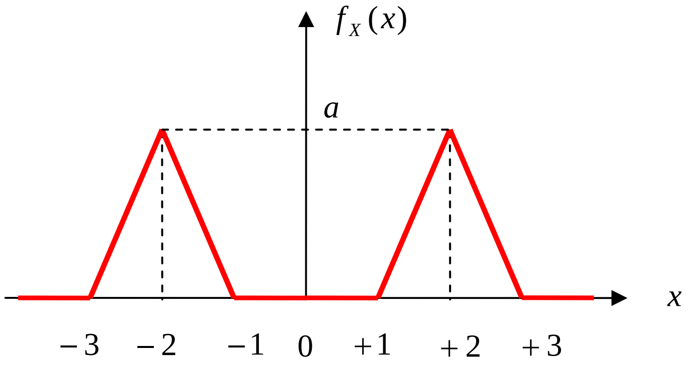
ספרנית צריכה למלא שני מדפים באמצעות $N_B = 30$ ספרי לימוד ו—$N_J = 25$ כתבי עת. ממוצע רוחב ספר (בס"מ) במדף הספרים הוא $\mu_B = 1.5$; ממוצע רוחב כתב עת (בס"מ) במדף כתבי העת הוא $\mu_J = 2$; סטיות התקן של רוחבי הספרים ורוחבי כתבי העת (בס"מ) הן $\sigma_B = 0.2$ ו—$\sigma_J = 0.5$, בהתאמה. מהי ההסתברות שסדרת הספרים הממוקמים במדף הספרים תהיה ארוכה מסדרת כתבי העת הממוקמים במדף כתבי העת?

❖ שאלה מס' 4

בקובייה מוטה, ההסתברות לקבלת התוצאה "2" היא $\frac{1}{2}$ וההסתברויות לקבלת כל תוצאות אחרות הן זהות. מטילים קובייה מוטה זו שלוש פעמים. מהי ההסתברות שסכום של 3 תוצאות יהיה שווה ל-6 אם ידוע כי בהטלה השנייה התקבל מספר זוגי?

❖ שאלה מס' 5

פונקצית צפיפות ההסתברות של משתנה מקרי X נתונה על ידי הציור:



א. מצא/י את הפרמטר a.

ב. מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\operatorname{var}[X]$ של המשתנה המקרי X.

ג. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$ עבור המשתנה X.

ד. מהי ההסתברות המותנית $P\left(|X|<\frac{3}{2}\ /\ X>1\right)$?

❖ שאלה מס' 6

נא להוכיח את הנוסחאות הבאות עבור הפרמטרים $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ של התפלגות χ^2:

א. $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)=2\ln\frac{2}{\alpha}$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2)=2\ln\frac{2}{2-\alpha}$.

ב. $\left(1+\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)\right)e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)}+\left(1+\frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)\right)e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)}=1$.

__הערה__: נוח להיעזר בהגדרות של פרמטרים $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.

בהצלחה !!

Department of Applied Mathematics – **Holon Academic Institute of Technology**

PROBABILITY AND STATISTICS / AM

פתרונות למבחן סוף הקורס

מסלול: מתמטיקה שימושית

סמסטר ב', מועד ב', תאריך: 07.08.05

❖ שאלה מס' 1

פרבולה מתוארת על ידי הנוסחא $y = x^2 + ax + b$ המכילה שני משתנים מקריים בלתי תלויים ורציפים a ו—b, בעלי התפלגות אחידה: $a \sim U(-1,+1)$ ו—$b \sim U(0,1)$. נגדיר את המשתנה הבדיד $N =$ {מספר נקודות חיתוך בין הפרבולה לצירים X ו— Y}.

א. מהם הערכים האפשריים של המשתנה N ? מצא/י את פונקצית ההסתברות של משתנה מקרי זה.

ב. חשב/י את התוחלת $E[N]$ ואת השונות $\mathrm{var}[N]$ של המשתנה N.

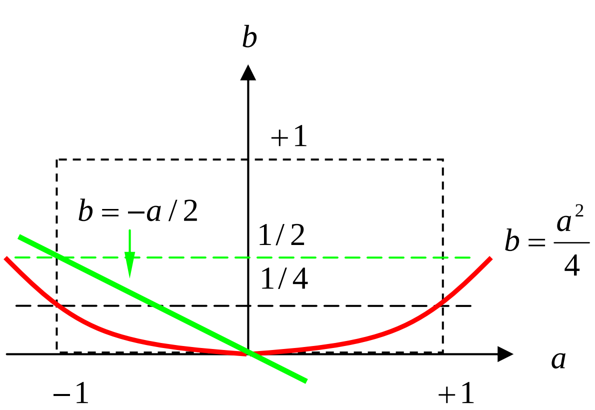
ג. אם ידוע כי $N \le 2$, מהי ההסתברות שהשטח מתחת לפרבולה בין הנקודות $X = 0$ ו—$X = 1$ עולה על $\frac{1}{3}$?

פתרון:

א. קל לראות כי עבור הפרבולה $y = x^2 + ax + b$ הערכים האפשריים של N הם $N = 1,2,3$.

- המקרה $N = 1$ אפשרי אך ורק כאשר למשוואה $x^2 + ax + b = 0$ אין שורשים ממשיים: $D = a^2 - 4b < 0$. אזי,

$$P(N = 1) = P\left(a^2 - 4b < 0\right) = P\left(b > a^2/4\right).$$



מהציור עולה כי

$$P(N=1)=P\left(b>a^2/4\right)=\frac{2-2\int_0^1 da\,\frac{a^2}{4}}{2}=1-\frac{1}{4}\int_0^1 daa^2=\frac{11}{12}.$$

- המקרה $N=2$ אפשרי אך ורק כאשר למשוואה $x^2+ax+b=0$ ישנם שני שורשים זהים: $D=a^2-4b=0$. כיוון ש-a ו— b הם משתנים רציפים, הסתברות של מאורע זה היא אפס:

$$P(N=2)=P\left(b=a^2/4\right)=0.$$

- המקרה $N=3$ אפשרי אך ורק כאשר למשוואה $x^2+ax+b=0$ ישנם שני שורשים שונים: $D=a^2-4b>0$.

$$P(N=3)=P\left(a^2-4b>0\right)=P\left(b<a^2/4\right)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}.$$

ב. חישוב התוחלת:

$$E[N]=\sum_n nP(N=n)=1\cdot\frac{11}{12}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{6}.$$

חישוב השונות:

$$E\left[N^2\right]=\sum_n n^2P(N=n)=1^2\cdot\frac{11}{12}+3^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{10}{6},$$

$$\operatorname{var}[N]=E\left[N^2\right]-\left(E[N]\right)^2=\frac{10}{6}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}.$$

ג. השטח שנדרש הוא

$$S=\int_0^1 dx\left(x^2+ax+b\right)=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b.$$

התנאי $N\le 2$ אומר כי $N=1$ כך שההסתברות הדרושה היא הסתרות מותנית

$$P\left(S>\frac{1}{3}/N=1\right)=P\left(\frac{a}{2}+b>0/b>\frac{a^2}{4}\right)=\frac{P\left(\frac{a}{2}+b>0\bigcap b>\frac{a^2}{4}\right)}{P(N=1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\int_0^1 da\,\frac{a^2}{4}\right)\right]}{11/12}=\frac{10}{11}.$$

❖ **שאלה מס' 2**

כמה מספרים שונים בני שמונה ספרות ניתן להרכיב מהספרות 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 כך ששלוש הספרות הראשונות משמאל יהיו מסודרות בסדר עולה ושלוש הספרות מימין יהיו מסודרות בסדר יורד? אסור להשתמש באותה סיפרה יותר מפעם אחת!

פתרון: על פי עקרון הכפל,

$$N = \left(\frac{P_{10}^3}{3!} - \frac{P_9^2}{2!} \right) \cdot P_7^2 \cdot \frac{P_5^3}{3!} = 84 \cdot 42 \cdot 10 = 35280 .$$

❖ **שאלה מס' 3**

ספרנית צריכה למלא שני מדפים באמצעות $N_B = 30$ ספרי לימוד ו— $N_J = 25$ כתבי את. ממוצע רוחב הספר (בס"מ) במדף הספרים הוא $\mu_B = 1.5$; ממוצע רוחב כתב האת (בס"מ) במדף כתבי האת הוא $\mu_J = 2$; סטיות התקן של רוחבי הספר ורוחבי כתב האת (בס"מ) הן $\sigma_B = 0.2$ ו— $\sigma_J = 0.5$ בהתאמה. מהי ההסתברות שסדרת הספרים הממוקמים במדף הספרים תהיה ארוכה מסדרת כתבי האת הממוקמים במדף כתבי האת?

פתרון:

נסמן ב- X_k^B את רוחב הספר ה- k וב- X_k^J את רוחב כתב האת ה- k. אזי אורכי סדרת הספרים X_B וסדרת כתבי את X_J הם

$$X_B = \sum_{k=1}^{N_B} X_k^B$$

ו—

$$X_J = \sum_{k=1}^{N_J} X_k^J$$

בהתאמה.

כיוון ש- N_B ו— N_J הם מספרים גדולים, על פי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$X_B \sim N(N_B \mu_B, N_B \sigma_B^2) \quad , X_J \sim N(N_J \mu_J, N_J \sigma_J^2) .$$

נגדיר את ההפרש $\Delta = X_B - X_J$. ההסתברות הדרושה היא $P(\Delta > 0)$. מתקיים:

$$\Delta \sim N(N_B \mu_B - N_J \mu_J, N_B \sigma_B^2 + N_J \sigma_J^2) .$$

חישוב פשוט מביא:

$$P(\Delta > 0) = 1 - P(\Delta < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{N_J \mu_J - N_B \mu_B}{\sqrt{N_B \sigma_B^2 + N_J \sigma_J^2}} \right)$$

כך ש-

$$P(\Delta > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{7.45}} \right) \approx 1 - \Phi(1.83) = 0.034 .$$

❖ שאלה מס' 4

בקובייה מוטה, ההסתברות לקבלת התוצאה "2" היא $\frac{1}{2}$ וההסתברויות לקבלת כל תוצאות אחרות הן זהות. מטילים קובייה מוטה זו שלוש פעמים. מהי ההסתברות שסכום של 3 תוצאות יהיה שווה ל-6 אם ידוע כי בהטלה השנייה יצא מספר זוגי?

פתרון:

מנתוני השאלה עולה כי $P(2)=\frac{1}{2}$ ו—$P(1)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{10}$. נגדיר את המאורעות $A=${סכום של שלוש תוצאות שווה ל-6 } ו—$B=${בהטלה השנייה יצא מספר זוגי}. ההסתברות הדרושה היא

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

הסכום 6 מתקבל ב—10 המקרים הבאים (מאורע A):

$$\begin{aligned}6 &= 1+1+4\\ &= 1+2+3\\ &= 1+3+2\\ &= 1+4+1\\ &= 2+1+3\\ &= 2+2+2\\ &= 2+3+1\\ &= 3+1+2\\ &= 3+2+1\\ &= 4+1+1\end{aligned}$$

אזי המאורע $A\cap B$ הוא:

$$\{1,2,3\}\mapsto P_{123}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}$$

$$\{1,4,1\}\mapsto P_{141}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$$

$$\{2,2,2\}\mapsto P_{222}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\{3,2,1\}\mapsto P_{321}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}$$

וההסתברות $P(A\cap B)=P_{123}+P_{141}+P_{222}+P_{321}=\frac{136}{1000}$.

כדי לחשב את ההסתברות $P(B)$, $B=${בהטלה השנייה יצא מספר זוגי}, יש לחשב את תרומת המקרים המתאימים למאורע זה.

- הסתברות לקבל "2" בהטלה השנייה היא $\frac{1}{2}$
- הסתברות לקבל "4" בהטלה השנייה היא $\frac{1}{10}$
- הסתברות לקבל "6" בהטלה השנייה היא $\frac{1}{10}$

כך ש—

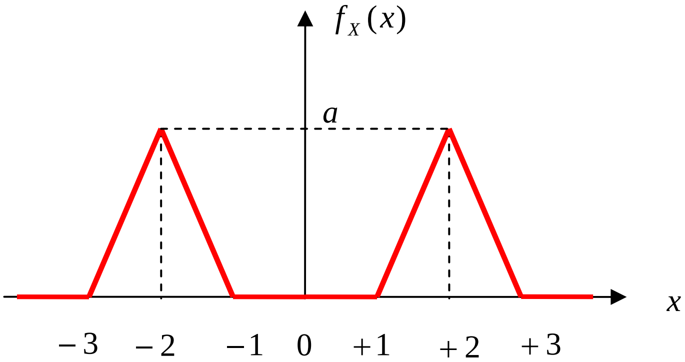
$$P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}.$$

זה מביא את התשובה הסופית:

$$P(A/B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\frac{136\cdot 10}{1000\cdot 7}=\frac{136}{700}\approx 0.19.$$

❖ **שאלה מס' 5**

פונקצית צפיפות של משתנה מקרי X נתונה על ידי הציור:



א. מצא/י את הפרמטר a.

ב. מצא/י את התוחלת $E[X]$ ואת השונות $\mathrm{var}[X]$ של המשתנה המקרי X.

ג. חשב/י את פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$ עבור המשתנה X.

ד. מהי ההסתברות המותנית $P\left(|X|<\frac{3}{2}\ /\ X>1\right)$?

פתרון:

א. משתמשים בנירמול כדי לחשב את a:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, f_X(x)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot a,$$

כך ש-

$$a=\frac{1}{2}.$$

ב. כדי למצוא את התוחלת ואת השונות, יש קודם לכתוב בצורה אנליטית את פונקצית הצפיפות:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ (x+3)/2, & -3\le x<-2\\ -(x+1)/2, & -2\le x<-1\\ 0, & -1\le x<+1\\ (x-1)/2, & +1\le x<+2\\ (3-x)/2, & +2\le x<+3\\ 0, & x\ge 3\end{cases}$$

חישוב התוחלת:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-2}x(x+3)dx-\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1}x(x+1)dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x(x-1)dx+\frac{1}{2}\int_{2}^{3}x(3-x)dx=0$$

(פונקציה אי זוגית מתחת לאינטגרל!)

חישוב השונות:

$$\mathrm{var}[X]=E[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{1}^{2}x^2(x-1)dx+\int_{2}^{3}x^2(3-x)dx=\frac{25}{6}.$$

ג. חישוב של פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$:

$$F_X(t)=P(X\le t)=\begin{cases}0, & t<-3\\ (t+3)^2/4, & -3\le t<-2\\ 1/4-t^2/4-t/2, & -2\le t<-1\\ 1/2, & -1\le t<+1\\ 1/2+(t-1)^2/4, & +1\le t<+2\\ 3t/2-t^2/4-5/4, & +2\le t<+3\\ 1, & t\ge 3\end{cases}$$

ד. חישוב:

$$P\left(|X|<\frac{3}{2}\ /\ X>1\right)=\frac{P(1<X<3/2)}{P(X>1)}=\frac{F_X(3/2)-F_X(1)}{1-F_X(1)}=\frac{9/16-8/16}{1-1/2}=\frac{1}{8}.$$

❖ **שאלה מס' 6**

נא להוכיח את הנוסחאות הבאות עבור הפרמטרים $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ של התפלגות χ^2 :

א. $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2) = 2\ln\frac{2}{\alpha}$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2) = 2\ln\frac{2}{2-\alpha}$.

ב. $1 = \left(1+\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)\right) e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)} + \left(1+\frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)\right) e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)}$.

<u>הערה</u>: נוח להיעזר בהגדרות של פרמטרים $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ ו— $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש בשתי הגדרות בסיסיות:

$$\int_0^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} dy\ f_Y(y;n) = 1-\frac{\alpha}{2} \quad \text{ו—} \quad \int_0^{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} dy\ f_Y(y;n) = \frac{\alpha}{2}.$$

א. עבור $n=2$ זה מביא:

$$\int_0^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)} dy\ f_Y(y;2) = \frac{1}{2}\int_0^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)} dy\, e^{-y/2} = 1-e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2)} = 1-\frac{\alpha}{2}$$

כך ש- $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2) = 2\ln\frac{2}{\alpha}$.

באותה דרך מגיעים לנוסחא $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2) = 2\ln\frac{2}{2-\alpha}$.

ב. סכום של שתי הגדרות הנ"ל מביא:

$$\int_0^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} dy\ f_Y(y;n) + \int_0^{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} dy\ f_Y(y;n) = 1.$$

עבור $n=4$ זה הופך ל—

$$\frac{1}{4}\int_0^{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)} dy\ ye^{-y/2} + \frac{1}{4}\int_0^{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)} dy\ ye^{-y/2} = 1.$$

לאחר חישוב האינטגרלים, מגיעים לנוסחא המבוקשת:

$$\left(1+\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)\right) e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(4)} + \left(1+\frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)\right) e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(4)} = 1.$$